ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΒΑΣΙΖΟΜΕΝΟΙ ΣΕ ΠΕΡΙΣΣΟΤΕΡΑ ΑΠΟ ΔΥΟ ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

Οι έλεγχοι που εξετάζονται στο κεφάλαιο αυτό αποτελούν επεκτάσεις για την περίπτωση περισσοτέρων από δύο δείγματα, του ελέγχου Smirnov για δύο δείγματα, που εξετάσθηκε στο προηγούμενο κεφάλαιο. Οι έλεγχοι αυτοί είναι τύπου Smirnov και είναι τόσο ευαίσθητοι σε διαφορές μεταξύ των πληθυσμών, οι οποίες οφείλονται αποκλειστικά στις μέσες τιμές τους. Αντίθετα, οι έλεγχοι αυτοί είναι συνεπείς έναντι μιας ευρύτερης κατηγορίας διαφορών και, επομένως, είναι συχνά περισσότερο ισχυροί σε σύγκριση με άλλους ελέγχους, εάν οι διαφορές των πληθυσμών ως προς τις μέσες τιμές τους συνοδεύονται και από διαφορές στις διασπορές τους και από άλλες διαφορές, όπως συμβαίνει συχνά. Ενα μεγάλο μειονέκτημα των ελέγχων αυτών είναι ότι εφαρμόζονται μόνο σε δείγματα του ιδίου μεγέθους. (Για την περίπτωση δειγμάτων διαφορετικού μεγέθους, δεν έχουν κατασκευασθεί σχετικοί πίνακες).

Ο πρώτος έλεγχος που εξετάζεται στην ενότητα αυτή αποτελεί μια άμεση επέκταση του αμφίπλευρου ελέγχου Smirnov. Η ελεγχοσυνάρτηση και η μέθοδος που χρησιμοποιείται για τον προσδιορισμό της κατανομής της μπορούν να χρησιμοποιηθούν για οποιονδήποτε αριθμό δειγμάτων του αυτού ή διαφορετικού μεγέθους. Ομως, η κατανομή της στατιστικής συνάρτησης έχει προσδιορισθεί μόνο για την περίπτωση τριών ανεξαρτήτων δειγμάτων του ιδίου μεγέθους. Επομένως, από την άποψη των πρακτικών εφαρμογών, ο έλεγχος της επόμενης ενότητας είναι απλώς ένας έλεγχος για τρία ανεξάρτητα δείγματα. Σε αντίθεση με τον πρώτο έλεγχο, οι δύο επόμενοι έλεγχοι που παρουσιάζονται μπορούν να εφαρμοσθούν σε προβλήματα που αναφέρονται σε δέκα το πολύ ανεξάρτητα δείγματα.

6.1 Ο ΕΛΕΓΧΟΣ BIRNBAUM-HALL

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε τρία ανεξάρτητα δείγματα του ιδίου μεγέθους, έστω n. Ας συμβολίσουμε τις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των τριών δειγμάτων με $S_1(x)$, $S_2(x)$ και $S_3(x)$, αντίστοιχα και τις άγνωστες συναρτήσεις κατανομής τους με $F_1(x)$, $F_2(x)$ και $F_3(x)$, $(x \in (-\infty,+\infty))$, αντίστοιχα. Οι υποθέσεις που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε έχουν την μορφή:

H_0: $F_1(x) = F_2(x) = F_3(x)$, για κάθε $x \in (-\infty,+\infty)$

H_1: Τουλάχιστον δύο από τις κατανομές διαφέρουν για τουλάχιστον μία τιμή $x \in (-\infty,+\infty)$.

Ας θεωρήσουμε τη μέγιστη απόλυτη απόσταση μεταξύ των εμπειρικών συναρτήσεων $S_1(x)$ και $S_2(x)$, μεταξύ των $S_2(x)$ και $S_3(x)$ και μεταξύ των $S_1(x)$ και $S_3(x)$. Η ελεγχοσυνάρτηση που προτάθηκε από τους Birnbaum και Hall είναι η μέγιστη των τριών αυτών αποστάσεων. Δηλαδή,

$$T_1 = \sup_{x,i,j} \left| S_i(x) - S_j(x) \right|,$$

η οποία διαβάζεται: "*η στατιστκή συνάρτηση* T_1 *είναι το supremum, για όλα τα* x *και για όλα τα* i *και* j (*από το* 1 *μέχρι το* 3), *της απόλυτης διαφοράς μεταξύ των εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής* $S_i(x)$ *και* $S_j(x)$".

Από την μορφή της ελεγχοσυνάρτησης, είναι προφανές ότι η κρίσιμη περιοχή θα βρίσκεται στην δεξιά ουρά της κατανομής της. Επομένως, ο κανόνας απόφασης θα έχει την εξής μορφή:

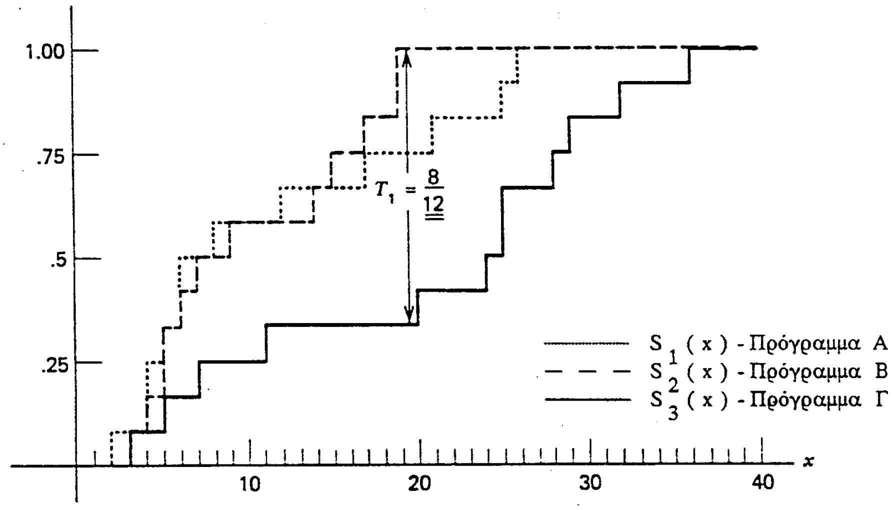
Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_1 υπερβαίνει το (1-α)-ποσοστιαίο σημείο $w_{1-\alpha}$ της κατανομής της, όπως αυτό δίνεται στον σχετικό πίνακα του παραρτήματος (πίνακας 22). Δηλαδή, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν $T_1 > w_{1-\alpha}$.

Η πραγματική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T_1 προσδιορίζεται με την μέθοδο που χρησιμοποιήθηκε για τον προσδιορισμό της κατανομής της ελεγχοσυνάρτησης Smirnov. Δηλαδή, κάτω από την μηδενική υπόθεση της ισότητας των τριών κατανομών, κάθε διάταξη του συνολικού διατεταγμένου δείγματος έχει την ίδια πιθανότητα. Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης T_1 υπολογίζεται για κάθε διάταξη και η κατανομή της T_1 προσδιορίζεται στην συνέχεια.

Παράδειγμα 6.1.1: Τρία διαφορετικά προγράμματα εκπαίδευσης στην πληκτρολόγηση κειμένου με την χρήση ενός κειμενογράφου εφαρμόσθηκαν σε τρεις ομάδες των 12 εθελοντριών χειριστριών ηλεκτρονικών υπολογιστών (ένα πρόγραμμα ανά ομάδα). Η επιλογή των εθελοντριών για τα διάφορα προγράμματα έγινε με τυχαίο τρόπο. Η μηδενική υπόθεση είναι ότι δεν υπάρχει διαφορά στις μεταξύ των τριών διαφορετικών προγραμμάτων, ενώ η εναλλακτική υπόθεση είναι ότι υπάρχει διαφορά. Ο πίνακας που ακολουθεί δίνει στοιχεία για τον αριθμό των λαθών που έκανε κάθε μία από τις εθελόντριες κατά την πληκτρολόγηση ενός κειμένου 500 χαρακτήρων.

Πρόγραμμα Α		Πρόγραμμα Β		Πρόγραμμα Γ	
2	17	17	5	29	5
12	4	15	6	3	25
5	25	3	19	25	32
4	6	19	4	28	24
26	21	5	9	11	36
8	6	14	7	7	20

Οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των τριών δειγμάτων δίνονται στο σχήμα που ακολουθεί. Από το σχήμα, φαίνεται ότι η μεγαλύτερη κατακόρυφη απόσταση μεταξύ των εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής $S_2(x)$ και $S_3(x)$ παρατηρείται στην τιμή x=19. (Προγράμματα Β και Γ). Η απόσταση αυτή είναι 8/12, δηλαδή, η παρατηρούμενη τιμή της T_1 είναι τ_1 = 8/12. Η κρίσιμη περιοχή μεγέθους α=0.05 αντιστοιχεί σε όλες τις τιμές της στατιστικής συνάρτησης T_1, οι οποίες είναι μεγαλύτερες από το 0.95-ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της. Το ποσοστιαίο αυτό σημείο προσδιορίζεται από τον σχετικό πίνακα του παραρτήματος για n=12. Ετσι, $w_{0.95}$ = 7/12. Επομένως, η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05 και μπορούμε να συμπεράνουμε ότι τα τρία προγράμματα δίαιτας διαφέρουν στην πραγματικότητα ως προς την αποτελεσματικότητά τους, όπως φαίνεται από την κατανομή πιθανότητας της απώλειας βάρους. Το κρίσιμο επίπεδο αυτού του ελέγχου είναι, όπως προκύπτει από τον σχετικό πίνακα, ελαφρώς μικρότερο από 0.05.



Σχήμα 6.1.1

Και ο έλεγχος αυτός είναι ακριβής μόνο στην περίπτωση που οι τυχαίες μεταβλητές είναι συνεχείς. Στην περίπτωση διακριτών τυχαίων μεταβλητών, ο έλεγχος αυτός είναι περισσότερο συντηρητικός. Τέλος, σημειώνεται ότι ο έλεγχος αυτός είναι κατάλληλος για την ανάλυση δεδομένων τα οποία βρίσκονται σε διατεταγμένη κλίμακα τουλάχιστον.

Λύση με το MINITAB: Το MINITAB δεν διαθέτει τον έλεγχο Birnbaum-Hall που απαιτείται για την λύση του παραδείγματος αυτού. Συνεπώς, πρέπει κι εδώ να καταχωρίσουμε σε τρεις στήλες τις τιμές που παίρνουν οι τρεις εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής σε όλα τα σημεία που αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις των τριών δειγμάτων και, σε τρεις άλλες στήλες, να καταχωρίσουμε τις απόλυτες διαφορές των εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής ανά ζεύγη. Το μεγαλύτερο από τα μέγιστα των τριών τελευταίων στηλών είναι η ζητούμενη τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_1.

Λύση με το SPSS: Η διεξαγωγή του ελέγχου Birnbaum-Hall με το SPSS δεν είναι απ' ευθείας δυνατή. Ο έλεγχος μπορεί να διεξαχθεί έμμεσα με την διεξαγωγή τριών χωριστών αμφίπλευρων ελέγχων Kolmogorov-Smirnov για δύο ανεξάρτητα δείγματα, έναν για κάθε ζεύγος δειγμάτων: Καταχωρίζουμε ανά δύο τα δείγματα σε τρεις μεταβλητές (έστω **x1x2**, **x2x3** και **x1x3**) και, σε μία τέταρτη στήλη καταχωρίζουμε κωδικούς που δείχνουν από ποιο δείγμα προέρχεται η κάθε παρατήρηση. Σημειώνεται ότι δεν χρειάζεται χωριστή στήλη κωδικών για κάθε ζεύγος δειγμάτων επειδή όλα τα δείγματα έχουν το ίδιο μέγεθος, συγκρίνονται μόνο ανά δύο και οι κωδικοί χρησιμεύουν απλά για διαχωρισμό των δειγμάτων. Επιπλέον, για τον έλεγχο χρησιμοποιείται η μέγιστη **απόλυτη** διαφορά των εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής και, επομένως, ενδιαφέρουν τα πρόσημα των διαφορών.

Διεξάγοντας τρεις χωριστούς αμφίπλευρους ελέγχους, τα αποτελέσματα που παίρνουμε (δείχνουμε μόνο το τμήμα τους που μας ενδιαφέρει) είναι:

Test Statistics[a]

		X1X2
Most Extreme Differences	Absolute	.250
	Positive	.083
	Negative	-.250
Kolmogorov-Smirnov Z		.612
Asymp. Sig. (2-tailed)		.847
Exact Sig. (2-tailed)		.817
Point Probability		.390

a Grouping Variable: Y12

Test Statistics[a]

		X1X3
Most Extreme Differences	Absolute	.500
	Positive	.500
	Negative	.000
Kolmogorov-Smirnov Z		1.225
Asymp. Sig. (2-tailed)		.100
Exact Sig. (2-tailed)		.092

Point Probability		.065

a Grouping Variable: Y12

Test Statistics[a]

		X2X3
Most Extreme Differences	Absolute	.667
	Positive	.667
	Negative	.000
Kolmogorov-Smirnov Z		1.633
Asymp. Sig. (2-tailed)		.010
Exact Sig. (2-tailed)		.007
Point Probability		.006

a Grouping Variable: Y12

Η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_1 είναι η μεγαλύτερη από τις απόλυτες διαφορές, δηλαδή είναι 0.667 (στην σύγκριση δεύτερου με τρίτο δείγμα). Τα κρίσιμα επίπεδα που δίνονται στους πίνακες δεν προσφέρονται για την συναγωγή συμπερασμάτων ως προς την ευλογοφάνεια της H_0. Συνεπώς, τα αγνοούμε και θα πρέπει να προχωρήσουμε συγκρίνοντας την τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_1 με τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής (πίνακας 22). **Λύση με το SAS:** Το πακέτο δεν διεξάγει τον έλεγχο Birnbaum-Hall. Μπορεί όμως να μας βοηθήσει στον εντοπισμό της τιμής στην οποία παρατηρείται η μεγαλύτερη απόσταση μεταξύ των εμπειρικών συναρτήσεων κατανομής και κατά συνέπεια, στην εύρεση της τιμής της ελεγχοσυνάρτησης. Αυτό επιτυγχάνεται αν διεξάγουμε τον έλεγχο Smirnov για κάθε ζεύγος διαφορετικών ομάδων των ανεξάρτητων δειγμάτων και λάβουμε ως ελεγχοσυνάρτηση τη μέγιστη υπολογιζόμενη από τους ελέγχους αυτούς. Έτσι, πληκτρολογούμε στο παράθυρο εντολών τα παρακάτω:

```
data samples3;
input x code @@;
cards;
2 1 12 1 5 1 4 1 26 1 8 1 17 1 4 1 25 1 6 1 21 1 6 1
17 2 15 2 3 2 19 2 5 2 14 2 5 2 6 2 19 2 4 2 9 2 7 2
29 3 3 3 25 3 28 3 11 3 7 3 5 3 25 3 32 3 24 3 36 3 20 3
;
run;
data sample3a;
```

```
set samples3;
if code=3 then delete;
run;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
data sample3b;
set samples3;
if code=2 then delete;
run;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
data sample3a;
set samples3;
if code=1 then delete;
run;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
```

Τα αποτελέσματα δίδονται στους παρακάτω πίνακες:

```
                       The SAS System
                N P A R 1 W A Y  P R O C E D U R E
                Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                   Classified by Variable CODE

                                                          Deviation
                                     EDF                  from Mean
CODE           N                 at Maximum               at Maximum
1             12                 0.75000000               -.433012702
2             12                 1.00000000               0.433012702
             ----                -----------
              24                 0.87500000

                      Maximum Deviation Occurred at Observation   16
                      Value of X at Maximum  19.0000000

                         Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                              KS = 0.125000          D = 0.250000
                          KSa = 0.612372          Prob > KSa = 0.8475


                              The SAS System

                     N P A R 1 W A Y  P R O C E D U R E

                    Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                           Classified by Variable CODE

                                                          Deviation
                                     EDF                  from Mean
CODE           N                 at Maximum               at Maximum
1             12                0.750000000               0.721687836
3             12                0.333333333               -.721687836
             ----                -----------
              24                0.541666667

                      Maximum Deviation Occurred at Observation    7
                      Value of X at Maximum  17.0000000

                         Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                              KS = 0.208333          D = 0.416667
                          KSa =  1.02062          Prob > KSa = 0.2485
```

```
                         The SAS System
                    N P A R 1 W A Y  P R O C E D U R E
                   Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                         Classified by Variable CODE

                                                          Deviation
                                 EDF                      from Mean
CODE           N             at Maximum                  at Maximum
2             12             1.00000000                  1.15470054
3             12             0.33333333                 -1.15470054
             ----            -----------
              24             0.66666667

                   Maximum Deviation Occurred at Observation    9
                   Value of X at Maximum  19.0000000

                      Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                           KS = 0.333333          D = 0.666667
                       KSa =  1.63299          Prob > KSa = 0.0097
```

Η τιμή τ_1 της ελεγχοσυνάρτησης T_1 για τα δεδομένα του παραδείγματός μας είναι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης D του πακέτου. Δηλαδή τ_1=0.666667. Σύγκριση αυτής με την κρίσιμη τιμή 7/12(=0.5833) από τους πίνακες, οδηγεί σε απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, σε α=5%.

6.2 Ο ΜΟΝΟΠΛΕΥΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ SMIRNOV ΓΙΑ k ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

Ο έλεγχος της ενότητας αυτής αποτελεί μία επέκταση του μονόπλευρου ελέγχου Smirnov στην περίπτωση περισσοτέρων από δύο δειγμάτων. Ο έλεγχος αυτός είναι κατάλληλος για μορφές εναλλακτικών υποθέσεων, οι οποίες, όχι μόνο θεωρούν ότι υπάρχουν διαφορές μεταξύ των πληθυσμών, αλλά και καθορίζουν προς ποια κατεύθυνση υφίστανται οι διαφορές αυτές. Για παράδειγμα, ενδέχεται οι πληθυσμοί να ταυτίζονται ως προς όλα τα χαρακτηριστικά τους εκτός από ένα, όπως είναι τα επίπεδα λιπάσματος σε πληθυσμούς φυτών, η δοσολογία φαρμάκων σε πληθυσμούς ζώων ή τα επίπεδα ηλικίας σε ανθρώπινους πληθυσμούς. Στις περιπτώσεις αυτές, ο ερευνητής μπορεί συχνά να διατυπώνει υποθέσεις ότι αν υπάρχουν διαφορές μεταξύ των πληθυσμών, αυτές οι διαφορές θα εμφανίζονται ως μια τάση των παρατηρήσεων να είναι π.χ. μεγαλύτερες στους μεγαλύτερους σε ηλικία πληθυσμούς, ή μικρότερες καθώς το επίπεδο της δοσολογίας φαρμάκου αυξάνει, κ.λ.π..

Τα δεδομένα αποτελούνται από k ανεξάρτητα τυχαία δείγματα του ιδίου μεγέθους n. Ας συμβολίσουμε τις αντίστοιχες εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής των δειγμάτων αυτών με $S_1(x)$, $S_2(x)$,...,$S_k(x)$ και τις αντίστοιχες άγνωστες συναρτήσεις κατανομής των πληθυσμών από τους οποίους τα δείγματα αυτά προέρχονται με $F_1(x)$, $F_2(x)$, ..., $F_k(x)$ ($x\in(-\infty,+\infty)$), αντίστοιχα.

Τα δεδομένα θα πρέπει και πάλι να βρίσκονται σε διατεταγμένη κλίμακα τουλάχιστον. Αν οι τυχαίες μεταβλητές είναι συνεχείς, τότε ο έλεγχος που θα περιγράψουμε είναι ακριβής. Διαφορετικά, ενδέχεται να είναι συντηρητικός.

Οι υποθέσεις για τις οποίες ενδιαφερόμαστε έχουν την μορφή:

H_0: $F_1(x) \le F_2(x) \le .... \le F_k(x)$, για κάθε x

H_1: $F_i(x) > F_j(x)$ για κάποιο x και για κάποιο ζεύγος (i, j), i<j.

Οι υποθέσεις αυτές χρησιμοποιούνται όταν η φυσική εναλλακτική υπόθεση του υπό εξέταση προβλήματος είναι ότι το i δείγμα τείνει να έχει μικρότερες τιμές από το j δείγμα, για κάποια τιμή του i μικρότερη από την τιμή του j. Η μηδενική υπόθεση, συχνά, ερμηνεύεται ως εξής: "*όλα τα δείγματα προέρχονται από πληθυσμούς οι οποίοι περιγράφονται από την ίδια κατανομή πιθανότητας*". Η ερμηνεία αυτή αν και κάπως αντίθετη από την μαθηματική μορφή της H_0, οφείλεται στο γεγονός ότι ο μονόπλευρος αυτός έλεγχος, συχνά, είναι κατάλληλος όταν, για κάποιους λόγους, οι διαφορές μεταξύ των πληθυσμών εμφανίζονται μόνο προς την κατεύθυνση που υποδηλώνεται από την H_1.

Η ελεγχοσυνάρτηση που χρησιμοποιείται για τον έλεγχο των παραπάνω υποθέσεων, εξαρτάται από την μέγιστη κατακόρυφη απόσταση, η οποία επιτυγχάνεται από την εμπειρική συνάρτηση κατανομής $S_i(x)$ υπεράνω της S_{i+1} (x), όπου i=1, 2, ..., k–1. Δηλαδή,

$$T_2 = \sup_{x,i<k}\left[S_i(x) - S_{i+1}(x)\right]$$

Είναι, δηλαδή, η ελεγχοσυνάρτηση T_2 το supremum υπεράνω όλων των τιμών x και υπεράνω όλων των i<k (υπεράνω του αριθμού των δειγμάτων) της διαφοράς $S_i(x) - S_{i+1}(x)$. Επομένως, για τον υπολογισμό της τιμής της στατιστικής συνάρτησης T_2, απαιτείται ο υπολογισμός των τιμών των συνήθων μονόπλευρων ελεγχοσυναρτήσεων Smirnov, οι οποίες ορίσθηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο, πρώτα για τα δείγματα 1 και 2, μετά για τα δείγματα 2 και 3 και κ.ο.κ. μέχρι τα δείγματα k–1 και k. Τότε, η T_2 είναι η μέγιστη αυτών των τιμών.

Από τον ορισμό της ελεγχοσυνάρτησης T_2, είναι σαφές ότι οι μεγάλες τιμές της συνηγορούν υπέρ της απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης. Επομένως, ο κανόνας απόφασης είναι ο εξής:

Η μηδενική υπόθεση απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_2 υπερβαίνει την τιμή $w_{1-\alpha}$ του (1–α)-ποσοστιαίου σημείου της κατανομής της. Δηλαδή, η μηδενική υπόθεση T_2 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν $T_2 > w_{1-\alpha}$.

Οπως και στην περίπτωση του ελέγχου Birnbaum-Hall, η ακριβής κατανομή του μονόπλευρου ελέγχου Smirnov για k δείγματα μπορεί να προσδιορισθεί με βάση την υπόθεση ότι κάθε διάταξη του ενιαίου δείγματος που προκύπτει από την ένωση των k επιμέρους δειγμάτων έχει την ίδια πιθανότητα. Η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης υπολογίζεται στην συνέχεια για κάθε δυνατή διάταξη οδηγώντας στην πινακοποίηση της συνάρτησης κατανομής της. Όμως, η χρονοβόρα αυτή διαδικασία δεν είναι απαραίτητη, γιατί η ακριβής μορφή της συνάρτησης κατανομής της T_2 προσδιορίσθηκε από τον Conover το 1967 ως μία μαθηματική συνάρτηση των k και n. Η ασυμπτωτική κατανομή της T_2 μελετήθηκε επίσης και χρησιμοποιήθηκε μαζί με την ακριβή κατανομή της για την κατασκευή του πίνακα των ποσοστιαίων σημείων της T_2 (πίνακας 23 του παραρτήματος). Η τιμή $w_{1-\alpha}$ προκύπτει διαιρώντας με n την τιμή του πίνακα, η οποία βρίσκεται στην n γραμμή του και στην στήλη που επιγράφεται με 1-α στην ομάδα των στηλών που αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη τιμή του k. Οι προσεγγίσεις των ποσοστιαίων σημείων της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης T_2 για $n > 50$ βασίζονται στην ασυμπτωτική κατανομή της T_2 (τελευταία γραμμή του σχετικού πίνακα) και προκύπτουν μετά από διαίρεση με $\sqrt{n}$.

Παράδειγμα 6.2.1: Με την πάροδο του χρόνου, ο φακός του ανθρώπινου ματιού χάνει την ικανότητά του να εστιάζεται σε αντικείμενα που βρίσκονται κοντά στο μάτι. Αυτό είναι ένα πολύ γνωστό χαρακτηριστικό των ανθρώπων ηλικίας μεγαλύτερης των 40. Για να ελεγχθεί κατά πόσον άτομα ηλικίας από 15 έως 30 ετών παρουσιάζουν επίσης αυτή την απώλεια ικανότητας του φακού των ματιών τους να εστιασθεί σε κοντινά αντικείμενα καθώς η ηλικία τους αυξάνει, επελέγησαν τυχαία οκτώ άτομα από κάθε μία από τις εξής τέσσερις κατηγορίες ηλικιών: *περίπου* 15 *ετών , περίπου* 20 *ετών*, *περίπου* 25 *ετών και περίπου* 30 *ετών*. Σχετικά με τα άτομα αυτά, έγινε η υπόθεση ότι αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από τον πληθυσμό των ατόμων της σχετικής κατηγορίας ηλικίας ως προς το υπό μελέτη χαρακτηριστικό. Κάθε άτομο κράτησε ένα τυπωμένο χαρτί μπροστά από το δεξί μάτι του, με το αριστερό μάτι καλυμμένο. Το χαρτί μετεκινείτο πλησιέστερα στο μάτι μέχρις ότου το πρόσωπο εδήλωνε ότι το τυπωμένο κείμενο άρχιζε να φαίνεται θαμπό. Η μικρότερη απόσταση στην οποία το κείμενο φαινόταν ακόμη καθαρό, μετρήθηκε για κάθε ένα από τα άτομα των τεσσάρων ομάδων. Η μηδενική υπόθεση ήταν ότι η κατανομή της απόστασης αυτής είναι η ίδια για όλους τους πληθυσμούς. Η εναλλακτική υπόθεση ήταν ότι στις ομάδες των μεγαλύτερων ηλικών η απόσταση αυτή τείνει να είναι μεγαλύτερη.

Λύση: Αν τα τέσσερα δείγματα αριθμηθούν από το 1 έως το 4, τότε οι υποθέσεις που ενδιαφέρει να εξετάσουμε είναι οι εξής:

H_0: $F_1(x) = F_2(x) = F_3(x) = F_4(x)$, για κάθε $x \in (-\infty, +\infty)$

H_1: $F_i(x) > F_j(x)$ για κάποιο x και κάποιο ζεύγος (i, j), $i < j$.

Εδώ $F_i(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ συμβολίζει την συνάρτηση κατανομής του πληθυσμού από τον οποίο προήλθε το i δείγμα, i = 1, 2, 3, 4. Ας σημειωθεί ότι, εδώ, υποθέτουμε ότι η ικανότητα του φακού του ματιού να εστιάζεται σε κοντινά αντικείμενα δεν βελτιώνεται με την ηλικία και, επομένως, μπορούμε να διατυπώσουμε την γενική υπόθεση με την παραπάνω ελαφρώς απλούστερη μορφή.

Οι αποστάσεις (σε εκατοστά) δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί. Τα δείγματα είναι διατεταγμένα κατά αύξουσα τάξη μεγέθους για ευκολία.

Δείγμα

1		2		3		4	
11.5	15.75	11.75	16.0	14.0	17.0	15.0	21.50
12.25	17.0	12.50	16.50	14.75	18.50	17.0	22.25

12.50	18.50	12.75	17.75	16.50	20.75	20.25	24.50
14.25	19.75	14.50	20.75	16.75	24.0	21.0	28.75

Οι μέγιστες διαφορές μεταξύ της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S_i(x)$ υπεράνω της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S_{i+1}(x)$ παρατηρούνται στα σημεία όπου η $S_i(x)$ παρουσιάζει άλμα, τα οποία είναι τιμές του i τυχαίου δείγματος. Επομένως, αρκεί να υπολογισθούν οι διαφορές $S_i(x) – S_{i+1}(x)$ μόνο στα n=8 σημεία του i δείγματος.

$S_1(x) – S_2(x)$	$S_2(x) – S_3(x)$	$S_3(x) – S_4(x)$
1/8–0 = 1/8	1/8–0 = 1/8	1/8–0 = 1/8
2/8–1/8 = 1/8	2/8–0 = 2/8	2/8–0 = 2/8
3/8–2/8 = 1/8	3/8–0 = 3/8	3/8–1/8 = 2/8
4/8–3/8 = 1/8	4/8–1/8 = 3/8	4/8–1/8 = 3/8
5/8–4/8 = 1/8	5/8–2/8 = 3/8	5/8–2/8 = 3/8
6/8–6/8 = 0	6/8–3/8 = 3/8	6/8–2/8 = 4/8
7/8–7/8 = 0	7/8–5/8 = 2/8	7/8–3/8 = 4/8
8/8–7/8 = 1/8	8/8–7/8 = 1/8	8/8–6/8 = 2/8
$\sup_x [S_1(x) - S_2(x)] = 1/8$	$\sup_x [S_2(x) - S_3(x)] = 3/8$	$\sup_x [S_3(x) - S_4(x)] = 4/8$

Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση T_2 έχει την τιμή $\tau_2 = 4/8$, η οποία είναι η μέγιστη των μέγιστων διαφορών που δίνονται στην βάση των στηλών του παραπάνω πίνακα. Η κρίσιμη περιοχή του ελέγχου αντιστοιχεί σε τιμές της ελεγχοσυνάρτησης T_2 οι οποίες είναι μεγαλύτερες του 0.95-ποσοστιαίου σημείου της κατανομής της ($w_{0.95}$) σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05, όπου η τιμή $w_{0.95}$ προσδιορίζεται από τον σχετικό πίνακα του παραρτήματος ίση με

$w_{0.95}$ = 5/n=5/8, για k=4 δείγματα και n=8 παρατηρήσεις ανά δείγμα. Επειδή η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_2 δεν υπερβαίνει την κρίσιμη τιμή 5/8, η μηδενική υπόθεση δεν απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας 5%. Από τον σχετικό πίκακα του παραρτήματος διαπιστώνεται ότι το κρίσιμο επίπεδο είναι λίγο μεγαλύτερο από 0.10.

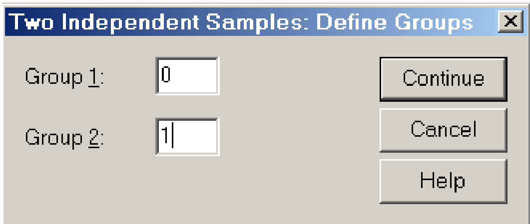
Παρατήρηση: Μια προσεκτική εξέταση των δεδομένων αποκαλύπτει μία ελαφρά τάση των παρατηρήσεων να αυξάνουν προς την κατεύθυνση που δηλώνει η εναλλακτική υπόθεση, αλλά η διαφορά, εάν είναι πραγματική, είναι πολύ μικρή για να ανιχνευθεί με τόσο μικρό μέγεθος δείγματος.

Λύση με το MINITAB: Το MINITAB δεν διαθέτει τον μονόπλευρο έλεγχο Smirnov για k ανεξάρτητα δείγματα. Η διεξαγωγή του, όμως, είναι δυαντή έμμεσα με τον υπολογισμό της τιμής της ελεγχοσυνάρτησης στην οποία βασίζεται. Καταχωρίζουμε σε k στήλες τις τιμές που παίρνουν οι εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής στα σημεία που αντιστοιχούν στις παρατηρήσεις όλων των δειγμάτων με σειρά ίδια με την σειρά εμφάνισης στην H_0 των συναρτήσεων κατανομής των αντίστοιχων πληθυσμών. Για κάθε ζεύγος διαδοχικών στηλών, υπολογίζουμε τις διαφορές «*πρώτη–δεύτερη*» και την μέγιστη τιμή των διαφορών αυτών. Η μεγαλύτερη των μέγιστων διαφορών είναι η τιμή της T_2.

Λύση με το SPSS: Ο μονόπλευρος έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για περισσότερα από 3 ανεξάρτητα δείγματα που απαιτείται για το παράδειγμα αυτό, δεν διατίθεται από το SPSS. Αν τα δείγματα είναι πολλά, η έμμεση διεξαγωγή του χρειάζεται μία χρονοβόρα διαδικασία που πάντως είναι συντομότερη από το να γίνει με το χέρι.

Και εδώ, αποθηκεύουμε κάθε ζεύγος διαδοχικών δειγμάτων σε μία μεταβλητή και διεξάγουμε έναν έλεγχο Kolmogorov-Smirnov για κάθε ζεύγος. Και πάλι, μία κωδική μεταβλητή είναι αρκετή μόνο που, τώρα, πρέπει να προσέχουμε ποιο δείγμα δηλώνουμε πρώτο κάθε φορά ώστε να ξέρουμε τι διαβάζουμε στους πίνακες.

Εμείς θα καταχωρίσουμε στην μεταβλητή **x1x2**, το πρώτο δείγμα επάνω από το δεύτερο, στην μεταβήτή **x2x3**, το δεύτερο επάνω από το τρίτο και, στην μεταβλητή **x3x4**, το τρίτο επάνω από το τέταρτο. Στην συνέχεια, στην μεταβλητή **y**, θα δηλώσουμε 8 μηδενικά επάνω από 8 άσους και, σε κάθε έλεγχο Kolmogorov-Smirnov, δίνουμε στο πλαίσιο **Define Groups**, που εικονίζεται παρακάτω, 0 στο πεδίο **Group1** και 1 στο πεδίο **Group2**.



Από όλους τους πίνακες αποτελεσμάτων, μας ενδιαφέρει το πεδίο **Most Extreme Differences: Positive**. Τα αποτελέσματα των τριών ελέγχων είναι:

Test Statistics[a]

		X1X2
Most Extreme Differences	Absolute	.125
	Positive	.125
	Negative	-.125
Kolmogorov-Smirnov Z		.250
Asymp. Sig. (2-tailed)		1.000
Exact Sig. (2-tailed)		1.000
Point Probability		.030

a Grouping Variable: Y

Test Statistics[a]

		X2X3
Most Extreme Differences	Absolute	.375
	Positive	.375
	Negative	.000
Kolmogorov-Smirnov Z		.750

Asymp. Sig. (2-tailed)		.627
Exact Sig. (2-tailed)		.660
Point Probability		.408

a Grouping Variable: Y

Test Statistics[a]

		X3X4
Most Extreme Differences	Absolute	.500
	Positive	.500
	Negative	.000
Kolmogorov-Smirnov Z		1.000
Asymp. Sig. (2-tailed)		.270
Exact Sig. (2-tailed)		.253
Point Probability		.166

a Grouping Variable: Y

Η μεγαλύτερη τιμή στο πεδίο που μας ενδιαφέρει είναι 0.5 και συνεπώς η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_2 είναι τ_2=0.5=4/8. Ο πίνακας 23 για k=4, n=8 και p=0.95 δίνει τιμή 5/8. Κατά συνέπεια, η μηδενική υπόθεση ότι οι πληθυσμοί που έδωσαν τα τέσσερα δείγματα δεν διαφέρουν μπορεί να θεωρηθεί εύλογη σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

Λύση με το SAS: Για την επίλυση του παραδείγματος με τον έλεγχο Kolmogorov-Smirnov, θα πρέπει να διεξάγουμε τρείς χωριστούς ελέγχους (ομάδες 1 και 2, 2 και 3 και, τέλος, 3 και 4) και να επιλέξουμε τη μέγιστη τιμή ττων ελεγχοσυναρτήσεων από τους τρεις ελέγχους. Γι’αυτο, πληκτρολογούμε τις εντολές που ακολουθούν.

```
data samples4;
input x code @@;
cards;
11.5 1 12.25 1 12.5 1 14.25 1 15.75 1 17 1 18.5 1 19.75 1
11.75 2 12.5 2 12.75 2 14.5 2 16 2 16.5 2 17.75 2 20.75 2
14 3 14.75 3 16.5 3 16.75 3 17 3 18.5 3 20.75 3 24 3
15 4 17 4 20.25 4 21 4 21.5 4 22.25 4 24.5 4 28.75 4
;
run;
data sample4a;
set samples4;
if code=3 then delete;
if code=4 then delete;
run;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
```

```
data sample4b;
set samples4;
if code=1 then delete;
if code=4 then delete;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
data sample4c;
set samples4;
if code=1 then delete;
if code=2 then delete;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
```

Το αποτέλεσμα του ελέγχου περιέχεται στους εξής πίνακες:

```
                              The SAS System

                     N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E
                    Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                          Classified by Variable CODE

                                                              Deviation
                                    EDF                       from Mean
CODE            N                at Maximum                  at Maximum
1               8               0.125000000                 0.176776695
2               8               0.000000000                 -.176776695
             ----               -----------
               16                0.062500000

                      Maximum Deviation Occurred at Observation    1
                      Value of X at Maximum  11.5000000

                         Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                              KS = 0.062500          D = 0.125000
                          KSa = 0.250000          Prob > KSa = 1.0000


                                The SAS System
                      N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E
                     Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                           Classified by Variable CODE

                                                             Deviation
                                   EDF                       from Mean
CODE            N               at Maximum                  at Maximum
2               8              0.375000000                 0.530330086
3               8              0.000000000                 -.530330086
             ----               -----------
              16               0.187500000

                      Maximum Deviation Occurred at Observation    3
                      Value of X at Maximum  12.7500000

                         Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                              KS = 0.187500          D = 0.375000
                          KSa = 0.750000          Prob > KSa = 0.6272


                                 The SAS System
                        N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E

                        Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                               Classified by Variable CODE
```

```
                                                             Deviation
                                    EDF                      from Mean
CODE          N                 at Maximum                  at Maximum
3             8                0.750000000                 0.707106781
4             8                0.250000000                 -.707106781
             ----                -----------
              16                0.500000000

                    Maximum Deviation Occurred at Observation    6
                    Value of X at Maximum  18.5000000

                       Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                        KS = 0.250000          D = 0.500000
                        KSa =  1.00000          Prob > KSa = 0.2700
```

Οι μέγιστες διαφορές είναι 0.125, 0.375 και 0.5 αντίστοιχα (δίδονται στα αντίστοιχα πεδία με το όνομα D). Επομένως, η ελεγχοσυνάρτηση T_2 παίρνει την τιμή 0.5. Σύγκριση αυτής με την κριτική τιμή 5/8=0.625 (>0.5) μας οδηγεί στην μη απόρριψη της μηδενικής υπόθεσης, σε α=5%.

6.3 Ο ΑΜΦΙΠΛΕΥΡΟΣ ΕΛΕΓΧΟΣ SMIRNOV ΓΙΑ k ΑΝΕΞΑΡΤΗΤΑ ΔΕΙΓΜΑΤΑ

Το 1965, από τον Conover και πάλι προτάθηκε ένας άλλος έλεγχος τύπου Smirnov για k ανεξάρτητα δείγματα. Ο έλεγχος αυτός διαφέρει από τον προηγούμενο στο ότι είναι αμφίπλευρος. Διαφέρει, επίσης, από τον έλεγχο Birnbaum-Hall στο ότι μπορεί να εφαρμοσθεί σε περισσότερα από τρία δείγματα λόγω της ύπαρξης περισσότερο εκτενών πινάκων. Οπως θα δούμε στα επόμενα, ο έλεγχος αυτός είναι ένας αμφίπλευρος έλεγχος κατάλληλος για k ανεξάρτητα δείγματα του ιδίου, κατ' ανάγκη, μεγέθους όπου η εναλλακτική υπόθεση δηλώνει ότι κάποιοι από τους πληθυσμούς ενδέχεται να τείνουν να δίνουν μεγαλύτερες τιμές από άλλους πληθυσμούς. Ο έλεγχος αυτός είναι ιδιαίτερα κατάλληλος για την ανάλυση στοιχείων στο πλαίσιο προβλημάτων της Βιολογίας και της Γεωργίας, ή για την ανάλυση οποιουδήποτε τύπου στοιχείων, τα οποία είναι φραγμένα εκ των κάτω από κάποια τιμή (π.χ. 0), αλλά δεν είναι φραγμένα εκ των άνω από καμία τιμή και τα οποία προέρχονται από πληθυσμούς, στους οποίους διαφορές στις μέσες τιμές (με την έννοια της H_1) συνοδεύονται και από άλλες διαφορές, όπως διαφορές στις διασπορές.

Τα δεδομένα αποτελούνται από k ανεξάρτητα τυχαία δείγματα του ιδίου μεγέθους n. (Η κλίμακα μέτρησης των δεδομένων πρέπει να είναι τουλάχιστον κλίμακα διάταξης και, κατ' αναλογία με τους προηγούμενους ελέγχους, αν τα δείγματα προέρχονται από συνεχείς κατανομές, ο έλεγχος θα είναι ακριβής, διαφορετικά θα τείνει να είναι συντηρητικός).

Ας συμβολίσουμε τις άγνωστες συναρτήσεις κατανομής από τις οποίες προήλθαν τα k δείγματα με $F_1(x),F_2(x),...,F_k(x)$, $x\in(-\infty,+\infty)$, αντίστοιχα. Οι υποθέσεις που ενδιαφερόμαστε να ελέγξουμε έχουν τη μορφή

H_0: $F_1(x) = F_2(x) =...= F_k(x)$, για κάθε $x\in(-\infty,+\infty)$.

(Οι συναρτήσεις κατανομής έχουν την ίδια μορφή).

H_1: $F_i(x) \neq F_j(x)$ για κάποιο x και για κάποιο (i,j).

(Οι συναρτήσεις κατανομής δεν είναι της ίδιας μορφής).

Η φυσική επιλογή στατιστικής συνάρτησης θα πρέπει να βασίζεται στην σύγκριση του *μεγαλύτερου* δείγματος με το *μικρότερο* δείγμα. Για τον σκοπό αυτό, προσδιορίζουμε την μέγιστη παρατήρηση σε κάθε δείγμα. Συμβολίζουμε τις προκύπτουσες μέγιστες τιμές με Z_1, Z_2, ..., Z_k. Το δείγμα που περιέχει την μέγιστη από τις μέγιστες αυτές παρατηρήσεις ονομάζεται *δείγμα τάξης* k ή το *μέγιστο δείγμα*. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής του δείγματος αυτού συμβολίζεται με $S^{(k)}(x)$. Το δείγμα που περιέχει την μικρότερη από τις μέγιστες παρατηρήσεις Z_1, Z_2, ..., Z_k ονομάζεται *δείγμα τάξης* 1 ή το *μικρότερο δείγμα*. Η εμπειρική συνάρτηση κατανομής του δείγματος αυτού συμβολίζεται με $S^{(1)}(x)$. Τότε, η ελεγχοσυνάρτηση ορίζεται ως η μέγιστη κατακόρυφη απόσταση που επιτυγχάνεται από την $S^{(1)}(x)$ υπεράνω της $S^{(k)}(x)$. Δηλαδή,

$$T_3 = \sup_x \left[S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)\right].$$

Οπως και με όλους τους ελέγχους αυτού του κεφαλαίου, η ακριβής κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T_3 μπορεί να προσδιορισθεί με βάση την υπόθεση ότι κάθε διάταξη του ενιαίου δείγματος, που προκύπτει από την συνένωση των k επιμέρους δειγμάτων, έχει την ίδια πιθανότητα όταν η μηδενική υπόθεση αληθεύει. Η χρονοβόρα όμως αυτή διαδικασία και πάλι δεν είναι απαραίτητη γιατί ο Conover (1965) προσδιόρισε την μορφή της συνάρτησης κατανομής της T_3 ως μία μαθηματική συνάρτηση του μεγέθους του δείγματος n και του αριθμού των δειγμάτων k. Η ασυμπτωτική κατανομή της στατιστικής συνάρτησης T είναι η ίδια με αυτή του αμφίπλευρου ελέγχου Smirnov για δύο δείγματα. Ο πίνακας 24 του παραρτήματος περιέχει τα ποσοστιαία σημεία της κατανομής της στατιστικής συνάρτησης T_3. Όπως και προηγουμένως, το (1–α)-ποσοστιαίο σημείο της T_3 προκύπτει μετά από διαίρεση με n του στοιχείου του πίνακα που βρίσκεται στην γραμμή που αντιστοιχεί στο σωστό μέγεθος δείγματος n και στην στήλη που αντιστοιχεί στο επιθυμητό επίπεδο σημαντικότητας 1–α (από την ομάδα των στηλών που αντιστοιχεί στον σωστό αριθμό δειγμάτων k). Προσεγγίσεις των ποσοστιαίων σημείων, για τιμές τουμεγέθους του δείγματος μεγαλύτερες από 50 ($n > 50$), επιτυγχάνονται μέσω της ασυμπτωτικής κατανομής της T_3 με διαίρεση με $\sqrt{n}$ των τιμών του πίνακα που δίνονται στις βάσεις των στηλών του και δεν εξαρτώνται από την τιμή του k.

Είναι προφανές ότι μεγάλες τιμές της στατιστικής συνάρτησης T_3 συνηγορούν υπέρ της απόρριψης της μηδενικής υπόθεσης και πάλι. Επομένως, ο κανόνας απόφασης έχει την μορφή:

Η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_3 υπερβαίνει το (1–α)-ποσοστιαίο σημείο $w_{1-\alpha}$ της κατανομής της. Δηλαδή, η μηδενική υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν $T_3 > w_{1-\alpha}$.

Παράδειγμα 6.3.1: Ας θεωρήσουμε τα δεδομένα του παραδείγματος 6.1.1 που χρησιμοποιήθηκε στην περίπτωση του ελέγχου Birnbaum-Hall, όπου σε κάθε πρόγραμμα εκπαίδευσης στην πληκτρολόγηση κειμένου χρησιμοποιήθηκαν 12 εθελόντριες. Η μηδενική υπόθεση είναι ότι δεν υπάρχει διαφορά στην αποτελεσματικότητα των τριών προγραμμάτων και η εναλλακτική είναι ότι υπάρχει κάποια διαφορά. Τα δεδομένα ήταν τα εξής:

Πρόγραμμα Α		Πρόγραμμα Β		Πρόγραμμα Γ	
2	17	17	5	29	5
12	4	15	6	3	25
5	25	3	19	25	32
4	6	<u>19</u>	4	28	24
<u>26</u>	21	5	9	11	<u>36</u>
8	6	14	7	7	20

Η υπογράμμιση αντιστοιχεί στην τιμή z_i της μέγιστης παρατήρησης Z_i του i δείγματος, i = 1, 2, 3. Έχουμε, επομένως,

$$z_1 = 26, z_2 = 19, z_3 = 36.$$

Η μέγιστη από τις μέγιστες αυτές παρατηρήσεις είναι η $z_3 = 36$. Επομένως, το πρόγραμμα Γ είναι το *δείγμα τάξης* 3. Η μικρότερη από τις μέγιστες αυτές παρατηρήσεις είναι η $z_2 = 19$. Επομένως, το πρόγραμμα Β ονομάζεται *το δείγμα τάξης* 1. Κατά συνέπεια, η στατιστική συνάρτηση T_3 υπολογίζεται νε βάση τα δύο αυτά δείγματα. Η διαφορά $S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)$ χρειάζεται να υπολογισθεί μόνο στις τιμές του δείγματος τάξης 1, γιατί αυτές είναι οι τιμές στις οποίες παρατηρούνται τα άλματα της εμπειρικής συνάρτησης κατανομής $S^{(1)}(x)$ και, επομένως, αυτές είναι οι τιμές στις οποίες η $S^{(1)}(x)$ θα επιτύχει την μέγιστη δυνατή τιμή της υπεράνω της $S^{(3)}(x)$. Για ευκολία, τα δείγματα διατάσσονται κατά αύξουσα τάξη μεγέθους των παρατηρήσεών τους.

Πρόγραμμα			Πρόγραμμα		
Β	Γ	$S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)$	Β	Γ	$S^{(1)}(x) - S^{(k)}(x)$
3	3	1/12–1/12=0	9	25	7/12–3/12=4/12
4	5	2/12–1/12=1/12	14	25	8/12–4/12=4/12
5	7		15	28	9/12–4/12=5/12
5	11	4/12–2/12=2/12	17	29	10/12–4/12=6/12
6	20	5/12–2/12=3/12	19	32	
7	24	6/12–3/12=3/12	19	36	12/12–4/12=8/12

Παρατηρούμε, από τον πίνακα αυτό, ότι η ελεγχοσυνάρτηση T_3 έχει την τιμή

$$\tau_3 = \sup_x \left[S^{(1)}(x) - S^{(3)}(x) \right] = 8/12$$

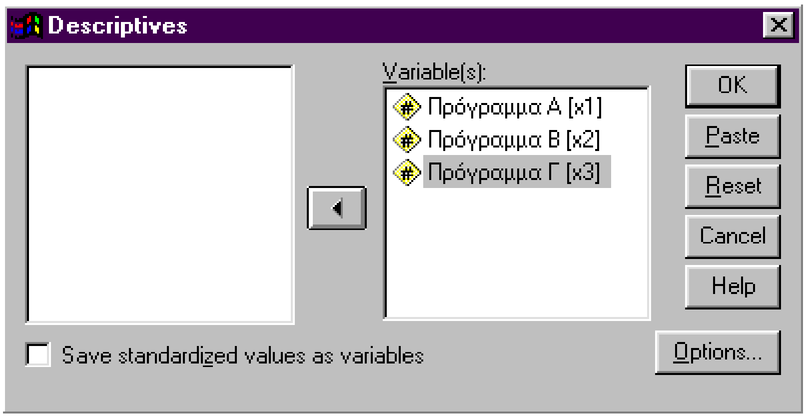
Η κρίσιμη περιοχή μεγέθους α=0.05 αντιστοιχεί σε τιμές της στατιστικής συνάρτησης T_3 μεγαλύτερες από το 0.95-ποσοστιαίο σημείο $w_{0.95}$ της κατανομής της, του οποίου η τιμή προσδιορίζεται από τον σχετικό πίνακα του παραρτήματος για n=12 και k=3 ίση με $w_{0.95} = 6/n = 6/12$. Επειδή, η παρατηρηθείσα τιμή της T_3 είναι > 6/12, η υπόθεση H_0 απορρίπτεται σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05. Στην πραγματικότητα, η μηδενική υπόθεση θα απορρίπτεται σε κάθε επίπεδο σημαντικότητας μεγαλύτερο ή ίσο του 0.01 (το κρίσιμο επίπεδο του ελέγχου μπορεί εύκολα να διαπιστωθεί ότι είναι $\hat{\alpha} \cong$ 0.01).

Λύση με το MINITAB: Το MINITAB δεν διαθέτει τον αμφίπλευρο έλεγχο Smirnov για k ανεξάρτητα δείγματα. Η διεξαγωγή του, όμως, είναι δυνατή έμμεσα με τον υπολογισμό της τιμής της ελεγχοσυνάρτησης στην οποία βασίζεται. Βρίσκοντας την μέγιστη παρατήρηση σε κάθε δείγμα, εύκολα ανακαλύπτουμε ποιο είναι το δείγμα τάξης 1 και ποιο είναι το δείγμα τάξης k. Στην συνέχεια, καταχωρίζουμε σε δύο στήλες τις τιμές που παίρνουν οι αντίστοιχες εμπειρικές συναρτήσεις κατανομής ($S^{(1)}(.)$ και $S^{(k)}(.)$) στις παρατηρήσεις του δείγματος τάξης 1 και, τέλος, σε μία άλλη στήλη, τις τιμές της διαφοράς $S^{(1)}(.)–S^{(k)}(.)$. Η μέγιστη τιμή αυτής της στήλης είναι η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_3. Στο παράδειγμα μας, η τιμή της T_3 προκύπτει ίση με τ_3=8/12, ενώ το 0.95 ποσοστιαίο σημείο της κατανομής της είναι 0.5. Επομένως, η μηδενική υπόθεση ότι όλα τα δείγματα προέρχονται από πληθυσμούς με την ίδια κατανομή, δεν είναι εύλογη σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

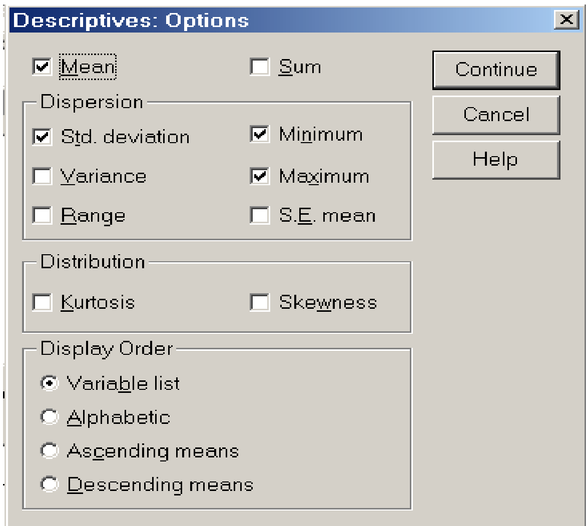
Λύση με το SPSS: Ο αμφίπλευρος έλεγχος Kolmogorov-Smirnov για περισσότερα από 2 δείγματα δεν διατίθεται από το SPSS. Η διεξαγωγή του, όμως, είναι δυνατή έμμεσα με τον υπολογισμό της τιμής της ελεγχοσυνάρτησης στην οποία βασίζεται με τον εξής τρόπο:

Καταχωρίζουμε τα δείγματα σε χωριστές μεταβλητές και βρίσκουμε την μέγιστη τιμή του καθενός. Στην συνέχεια, διεξάγουμε αμφίπλευρο έλεγχο Kolmogorov-Smirnov για τα δύο δείγματα στα οποία βρέθηκαν η μικρότερη και η μεγαλύτερη μέγιστη τιμή.

Στο παράδειγμα μας, καταχωρίζουμε τα τρία δείγματα στις μεταβλητές **x1, x2, x3**. Για να βρούμε την μέγιστη τιμή του καθενός επιλέγουμε **Analyze, Descriptive Statistics, Descriptives** και προκύπτει το ακόλουθο πλαίσιο διαλόγου:



Στο πεδίο **Variable(s)**, δηλώνουμε και τις τρεις μεταβλητές. Πιέζοντας **Options**, εμφανίζεται το εξής πλαίσιο:



Στο πλαίσιο αυτό, αφήνουμε επιλεγμένο μόνο το **Maximum** (αφού μόνο αυτό χρειαζόμαστε). Τα αποτελέσματα περιέχονται στον εξής πίνακα:

Descriptive Statistics

	N	Maximum
Πρόγραμμα Α	12	26
Πρόγραμμα Β	12	19
Πρόγραμμα Γ	12	36
Valid N (listwise)	12	

Από τον πίνακα αυτό, προκύπτει ότι τα δείγματα που θα χρειαστούμε είναι το δεύτερο και το τρίτο. Καταχωρίζουμε τα δείγματα αυτά σε μία στήλη (με όνομα **x**) εισάγοντας πρώτα τις τιμές του δευτέρου δείγματος. Στην συνέχεια, κάνουμε έλεγχο Kolmogorov-Smirnov δηλώνοντας πρώτα το δεύτερο δείγμα με τα εξής αποτελέσματα:

Test Statistics[a]

		X
Most Extreme Differences	Absolute	.667
	Positive	.667
	Negative	.000
Kolmogorov-Smirnov Z		1.633
Asymp. Sig. (2-tailed)		.010
Exact Sig. (2-tailed)		.007
Point Probability		.006

a Grouping Variable: Y

Με την σειρά που δηλώσαμε τα δείγματα, η τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_3 δίνεται στο πεδίο **Most Extreme Differences: Positive**. Επομένως, $τ_3$=0.667. Από τον πίνακα 24 του παραρτήματος, για k=3, n=12 και p=0.95, προκύπτει ότι το 0.05 ποσοστιαίο σημείο τςη κατανομής T είναι 6/12=0.5. Επομένως, η μηδενική υπόθεση δεν μπορεί να θεωρηθεί εύλογη σε επίπεδο σημαντικότητας 0.05.

Λύση με το SAS: Το πακέτο δεν διεξάγει άμεσα αμφίπλευρο έλεγχο Kolmogorov-Smirnov για k ανεξάρτητα δείγματα. Μπορούμε όμως έμμεσα να διεξάγουμε τον έλεγχο αφού πρώτα υπολογίσουμε τις μέγιστες τιμές στο δείγμα ανά κατηγορία, και κρατήσουμε τελικά στο σετ δεδομένων τις κατηγορίες που περιέχουν τη μέγιστη και την ελάχιστη από αυτές τις τιμές. Έτσι, πληκτρολογώντας τις εντολές

```
data samples3;
input x code @@;
cards;
2 1 12 1 5 1 4 1 26 1 8 1 17 1 4 1 25 1 6 1 21 1 6 1
17 2 15 2 3 2 19 2 5 2 14 2 5 2 6 2 19 2 4 2 9 2 7 2
29 3 3 3 25 3 28 3 11 3 7 3 5 3 25 3 32 3 24 3 36 3 20 3
;
run;
proc means max;
var x;
by code;
run;
```

παίρνουμε το αποτέλεσμα που ακολουθεί

```
                              The SAS System
                             Analysis Variable : X

---------------------------------- CODE=1 ------------------------------

                                 Maximum
                               ------------
                                26.0000000
                               ------------

---------------------------------- CODE=2 ------------------------------

                                 Maximum
                               ------------
                                19.0000000
                               ------------

---------------------------------- CODE=3 ------------------------------
```

```
                 Maximum
               ------------
                36.0000000
               ------------
```

Παρατηρούμε ότι η ελάχιστη και μέγιστη τιμή των μέγιστων τιμών σε κάθε κατηγορία, βρίσκονται στις ομάδες 2 και 3 αντίστοιχα. Κατά συνέπεια, αγνοούμε την πρώτη ομάδα και διεξάγουμε τον έλεγχο με τις παρακάτω εντολές.

```
data samples3;
set samples3;
if code=1 then delete;
PROC NPAR1WAY EDF;
      CLASS code;
      VAR x;
run;
```

Τα αποτελέσματα δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

```
                              The SAS System

                      N P A R 1 W A Y   P R O C E D U R E

                    Kolmogorov-Smirnov Test for Variable X
                           Classified by Variable CODE
                                                                 Deviation
                                  EDF                            from Mean
CODE            N              at Maximum                       at Maximum
2              12              1.00000000                       1.15470054
3              12              0.33333333                      -1.15470054
              ----             -----------
               24              0.66666667

                      Maximum Deviation Occurred at Observation    9
                      Value of X at Maximum  19.0000000

                   Kolmogorov-Smirnov 2-Sample Test (Asymptotic)
                         KS = 0.333333          D = 0.666667
                        KSa =  1.63299          Prob > KSa = 0.0097
```

Η μέγιστη απόκλιση παρατηρήθηκε στην παρατήρηση x=19 και η αντίστοιχη τιμή της ελεγχοσυνάρτησης T_3 υπολογίστηκε ίση με 0.6667. Το πεδίο **Prob > KSa = 0.0097** δίνει το παρατηρούμενο επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας που είναι μικρότερο του α=5%.

Παρατήρηση: Οι έλεγχοι οι οποίοι παρουσιάσθηκαν στην ενότητα αυτή περιορίζονται μόνο σε δείγματα του ιδίου μεγέθους. Ειδικότερα ο έλεγχος Birnbaum-Hall είναι ακόμα περισσότερο περιορισμένος ως προς την εφαρμογή του σε τρία μόνο δείγματα. Στην πραγματικότητα, οποιοσδήποτε από αυτούς τους ελέγχους θα μπορούσε να εφαρμοσθεί σε οποιονδήποτε αριθμό δειγμάτων και τα δείγματα θα μπορούσαν να είναι οποιουδήποτε μεγέθους, αν υπήρχαν διαθέσιμοι πίνακες των κατανομών των αντιστοίχων ελεγχοσυναρτήσεων. Θεωρητικά, οι πίνακες αυτοί είναι δυνατόν να κατασκευασθούν με την μέθοδο απαρίθμησης που περιγράφηκε στα προηγούμενα. Από την πλευρά όμως της πρακτικής εφαρμογής, η μέθοδος αυτή της απαρίθμησης των δυνατών διατάξεων του συνολικού δείγματος που προκύπτει από την συνένωση των επιμέρους δειγμάτων είναι χρονοβόρα ακόμη και με τη χρήση ηλεκτρονικών υπολογιστών. Εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση των τριων δειγμάτων ίσου μεγέθους.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θα μπορούσατε να συμπεράνετε ότι τα εξής δεδομένα επιδεικνύουν την ύπαρξη κάποιας διαφοράς στο μήκος των ελληνικών λέξεων που οφείλεται στο γένος τους; Οι παρατηρήσεις παριστάνουν τον αριθμό των γραμμάτων από τα οποία αποτελούνται ελληνικές λέξεις που επελέγησαν με τυχαίο τρόπο μεταξύ του συνόλου των λέξεων που ανήκουν στα τρία γένη: αρσενικό, θηλυκό και ουδέτερο.

Γένος Λέξης		
Αρσενικό	Θηλυκό	Ουδέτερο

5	7	4	6	7	8
7	5	8	3	10	7
6	9	5	6	7	12

Να χρησιμοποιηθούν οι δύο έλεγχοι του κεφαλαίου αυτού (Smirnov και Birnbaum-Hall) για την ανάλυση των δεδομένων αυτών και να συγκριθούν τα αποτελέσματα.

2. Για να ελεγχθεί κατά πόσον ένα μεγαλύτερο διάστημα μεταξύ της τελευταίας ημέρας των μαθημάτων και της πρώτης ημέρας των εξετάσεων τείνει να βελτιώνει την απόδοση των φοιτητών στο τελικό διαγώνισμα, οι 48 φοιτητές που παρακολούθησαν ένα συγκεκριμένο μάθημα σε ένα εξάμηνο χωρίσθηκαν με τυχαίο τρόπο σε τέσσερις ομάδες των 12 φοιτητών. Η ομάδα 1 έκανε το τελικό διαγώνισμα δύο μέρες μετά την τελευταία ημέρα των μαθημάτων. Αντίστοιχα, οι ομάδες 2,3 και 4 έκαναν το τελικό δοαγώνισμα τέσσερις ημέρες, έξι ημέρες και οκτώ ημέρες μετά την τελευταία ημέρα των μαθημάτων. Οι βαθμοί τους, με άριστα το 100, ήταν οι εξής:

Ομάδα 1			Ομάδα 2			Ομάδα 3			Ομάδα 4		
48	71	80	42	70	77	38	73	83	49	77	84
61	74	82	48	71	81	58	74	87	58	79	93
67	75	87	62	73	89	70	75	90	73	80	94
68	79	89	67	75	92	71	79	94	74	84	97

Νομίζετε ότι μία αύξηση στο διάστημα που μεσολαβεί από την τελευταία ημέρα των μαθημάτων μέχρι την ημέρα του τελικού διαγωνίσματος τείνει να βελτιώσει την απόδοση στο τελικό διαγώνισμα;

3. Ο πίνακας που ακολουθεί περιέχει στοιχεία για την ποσότητα σιδήρου στο αίμα λευκών ποντικιών μετά την εφαρμογή ενός από πέντε προγράμματα διατροφής για ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα. Κάθε πρόγραμμα εφαρμόσθηκε σε 10 ποντίκια τα οποία επελέγησαν με τυχαίο τρόπο.

		Διατροφή		
Α	Β	Γ	Δ	Ε
2.23	5.59	4.50	1.35	1.40
1.14	0.96	3.92	1.06	1.51
2.63	6.96	10.33	0.74	2.49
1.00	1.23	8.23	0.96	1.74
1.35	1.61	2.07	1.16	1.59
2.01	2.94	4.90	2.08	1.36
1.64	1.96	6.48	0.69	3.00
1.13	3.68	6.42	0.68	4.81
1.01	1.54	3.72	0.84	5.21
1.70	2.59	6.00	1.34	5.12

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα αυτού, θα μπορούσατε να συμπεράνετε ότι τα διαφορετικά προγράμματα διατροφής επηρεάζουν την ποσότητα σιδήρου στο αίμα των ποντικιών;

4. Τα παρακάτω δεδομένα αναφέρονται στις διαφορές του ύψους μεταξύ αντρόγυνων τριών χωρών.

Γαλλία: 2.1 0.8 2.5 0.7 2.4 2.6 1.1 1.3 1.8 0.9
Ιαπωνία: 3.4 1.5 1.7 1.9 2.5 3.1 1.5 1.9 1.6 3.6
Αμερική: 5.1 2.7 4.2 2.7 4.1 2.9 2.7 2.3 2.5 3.5 2.1 3.7 3.7

Να ελέγξετε κατά πόσον τα παραπάνω τρία δείγματα προέρχονται από τον ίδιο πληθυσμό.

(Οικ. Παν/μιο Αθηνών – Εξετ. Φεβρ. 1995)