ΚΕΦΑΛΑΙΟ 16

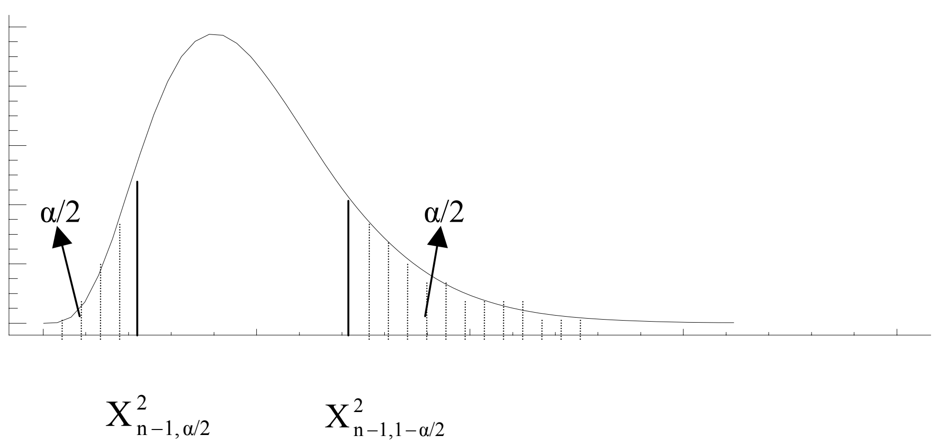
ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΓΙΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ

Α. Περίπτωση Ενός Πληθυσμού

Αν μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε ένα διάστημα εμπιστοσύνης για την διακύμανση σ^2 ενός πληθυσμού, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι ένα τυχαίο δείγμα από έναν $N(\mu,\sigma^2)$ πληθυσμό τότε,

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός αυτό μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το σ^2 ως εξής:



$$P\left(X^2_{n-1,\,\alpha/2} \le \frac{nS^2}{\sigma^2} \le X^2_{n-1,\,1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

ή ισοδύναμα

$$\boxed{P\left(\frac{nS^2}{X^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{nS^2}{X^2_{n-1,\,\alpha/2}} \right) = 1-\alpha}$$

ή

$$\boxed{P\left(\frac{(n-1)S^{*2}}{X^2_{n-1,\,1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)S^{*2}}{X^2_{n-1,\,\alpha/2}} \right) = 1-\alpha}$$

Παράδειγμα: Μια μηχανή που χρησιμοποιείται να γεμίζει κουτιά με μπύρα θα πρέπει να λειτουργεί με τρόπο ώστε η ποσότητα μπύρας που τοποθετείται σε κάθε κουτί να είναι περίπου σταθερή. Αν τοποθετηθεί περισσότερη από την κανονική μπύρα, τότε τα κουτιά ξεχειλίζουν, ενώ αντίθετα, αν τοποθετηθεί ποσότητα πολύ μικρότερη από την κανονική, θα δημιουργηθούν παράπονα από τους καταναλωτές.

Προκειμένου να ελεγχθεί η ποσότητα μπύρας που τοποθετείται στα κουτιά, επιλέγονται τυχαία 20 τέτοια κουτιά στα οποία παρατηρείται μια τυπική απόκλιση 0.2 gr. Να εκτιμηθεί η διακύμανση της ποσότητας που τοποθετείται στα κουτιά με την χρήση ενός 95% διαστήματος εμπιστοσύνης.

Λύση: Υποθέτοντας ότι η ποσότητα της μπύρας που τοποθετείται σε κάθε κουτί ακολουθεί την κανονική κατανομή, ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το σ^2 θα είναι το,

$$\left(\frac{20(.2)^2}{X^2_{19,\ .975}}, \frac{20(.2)^2}{X^2_{19,\ .025}} \right)$$

ή

$$\left(\frac{20(.2)^2}{32.85}, \frac{20(.2)^2}{8.907} \right)$$

ή

$$(.02,\ .09)$$

Το αντίστοιχο διάστημα εμπιστοσύνης για την τυπική απόκλιση σ κατασκευάζεται με την θεώρηση των τετραγωνικών ριζών των άκρων του παραπάνω διαστήματος.

Παρατήρηση: Η επιλογή περιοχών στις ουρές της κατανομής του αυτού εμβαδού για την κατασκευή του διαστήματος εμπιστοσύνης είναι βέβαια αυθαίρετη. Ο ερευνητής μπορεί να επιλέξει οποιοδήποτε ζεύγος σημείων, έτσι ώστε το συνολικό εμβαδόν στις ουρές της κατανομής να είναι ίσο με α. Επιπλέον το διάστημα εμπιστοσύνης που κατασκευάσθηκε με τη προηγηθείσα μέθοδο δεν είναι κατ' ανάγκη το βραχύτερο. Μπορεί κανείς να κατασκευάσει διάστημα του αυτού βαθμού εμπιστοσύνης, το οποίο να είναι βραχύτερο. Παρόλα αυτά, στην πράξη χρησιμοποιείται η μεθόδος που αναφέραμε των ίσων εμβαδών στις ουρές της κατανομής κυρίως διότι υπάρχουν οι πίνακες αλλά και διότι η ακρίβεια η οποία επιτυγχάνεται δεν διαφέρει πολύ από εκείνην που θα επιτυγχάναμε αν είχαμε χρησιμοποιήσει την διαδικασία κατασκευής διαστήματος εμπιστοσύνης ελαχίστου μήκους.

Σημείωση: Το στατιστικό πακέτο Statgraphics δίνει τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τη διακύμανση ενός πληθυσμού με την ίδια διαδικασία και στην ίδια οθόνη με τα διαστήματα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή.

B. Περίπτωση Δύο Πληθυσμών

Προκειμένου να συγκρίνουμε τις διακυμάνσεις δύο ανεξαρτήτων κανονικών πληθυσμών με την κατασκευή διαστημάτων εμπιστοσύνης, χρησιμοποιούμε το θεώρημα που συνδέει ανεξάρτητες X^2 μεταβλητές με την κατανομή F.

Όταν μας ενδιαφέρει η σύγκριση των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών, κατασκευάζουμε διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο σ_X^2 / σ_Y^2 . Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι:

$$\frac{(n-1)S_X^{*2}}{\sigma_X^2} \equiv \frac{nS_X^2}{\sigma_X^2} \sim X_{n-1}^2$$

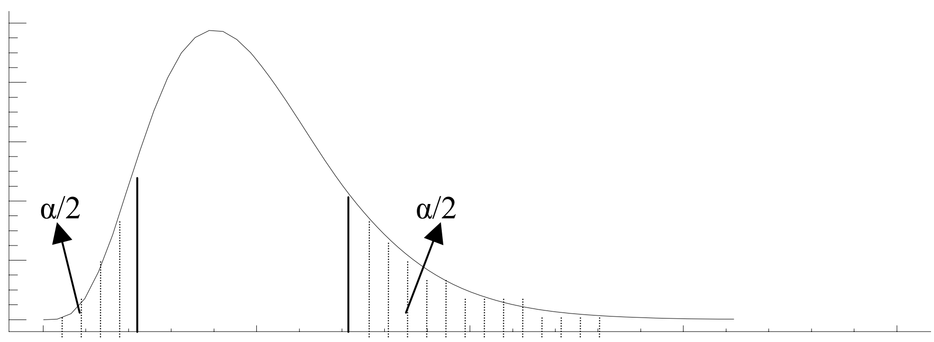
και

$$\frac{(m-1)S_Y^{*2}}{\sigma_Y^2} \equiv \frac{mS_Y^2}{\sigma_Y^2} \sim X_{m-1}^2$$

όπου n, m είναι τα μεγέθη των δύο ανεξαρτήτων δειγμάτων με διασπορές S_X^2, S_Y^2 (αντίστοιχα S_X^{*2}, S_Y^{*2} για τις αμερόληπτες εκτιμήτριες) που έχουν ληφθεί από δύο ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς με διακυμάνσεις σ_X^2, σ_Y^2. Σύμφωνα με το θεώρημα του παραρτήματος θα έχουμε,

$$\frac{\dfrac{S_X^{*2}}{\sigma_X^2}}{\dfrac{S_Y^{*2}}{\sigma_Y^2}} \equiv \frac{\dfrac{nS_X^2}{(n-1)\sigma_X^2}}{\dfrac{mS_Y^2}{(m-1)\sigma_Y^2}} \sim F_{n-1,\, m-1}$$

(S_X^2, S_Y^2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές δεδομένου ότι και X, Y είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές).



$F_{n-1,\, m-1,\, \alpha/2}$ $\qquad$ $F_{n-1,\, m-1,\, 1-\alpha/2}$

$$P\left(F_{n-1, m-1, \alpha/2} \le \frac{\dfrac{nS_X^2}{(n-1)\sigma_X^2}}{\dfrac{mS_Y^2}{(m-1)\sigma_Y^2}} \equiv \frac{\dfrac{S_X^{*2}}{\sigma_X^2}}{\dfrac{S_Y^{*2}}{\sigma_Y^2}} \le F_{n-1, m-1, 1-\alpha/2} \right) = 1 - \alpha$$

Επομένως, ένα 100(1-α)% διάστημα εμπιστοσύνης για το σ_X^2 / σ_Y^2 δίνεται από τον τύπο,

$$\boxed{\left(F^{-1}_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \frac{\frac{nS_X^2}{n-1}}{\frac{mS_Y^2}{m-1}}, \quad F^{-1}_{n-1,m-1,\alpha/2} \frac{\frac{nS_X^2}{n-1}}{\frac{mS_Y^2}{m-1}} \right)}$$

ή, ισοδύναμα από τον τύπο

$$\boxed{\left(F^{-1}_{n-1,m-1,1-\alpha/2} \frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}}, \quad F^{-1}_{n-1,m-1,\alpha/2} \frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}} \right)}$$

Σημείωση: Η χρησιμοποίηση του παραπάνω τύπου έχει κάποιες δυσκολίες δοθέντος ότι οι πίνακες της κατανομής F δεν δίνουν πάντα το κατώτερο εκατοστιαίο σημείο της κατανομής F.

Παρ' όλα αυτά το σημείο αυτό μπορεί να προσδιορισθεί δεδομένου ότι, αν

$$F = \frac{U/r_1}{V/r_2} \sim F_{r_1, r_2}$$

όπου U και V είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν τις κατανομές X^2 με r_1, r_2 βαθμούς ελευθερίας έχουμε ότι,

$$\frac{1}{F} = \frac{V/r_2}{U/r_1} \sim F_{r_2, r_1}$$

Επομένως αν $X \sim F_{r_1, r_2}$ θα έχουμε,

$$\alpha/2 = P\left(X < F_{r_1, r_2, \alpha/2}\right)$$

$$= P\left(1/X > 1/F_{r_1, r_2, \alpha/2}\right)$$

$$=1-P\left(1/X<1/F_{r_1,r_2,\alpha/2}\right)$$

Επομένως,

$$P\left(1/X<1/F_{r_1,r_2,\alpha/2}\right)=1-\alpha/2$$

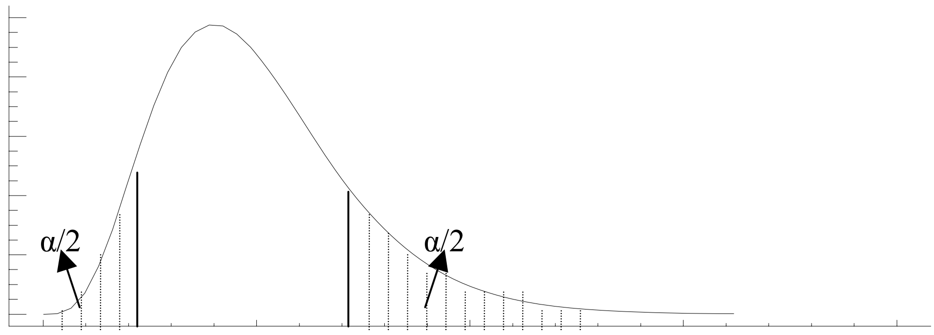
Αλλά, $1/X \sim F_{r_2,r_1}$

Επομένως,

$$1/F_{r_1,r_2,\alpha/2} = F_{r_2,r_1,1-\alpha/2}$$

δηλαδή

$$F_{r_1,r_2,\alpha/2} = 1 / F_{r_2,r_1,1-\alpha/2}$$



$F_{r_1,r_2,\alpha/2}$ $\quad$ $F_{r_1,r_2,1-\alpha/2}$

$= 1/F_{r_2,r_1,1-\alpha/2}$

Σημείωση: Τα διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο των διακυμάνσεων δύο ανεξάρτητων κανονικών πληθυσμών δίνονται στο στατιστικό πακέτο STATGRAPHICS στον ίδιο πίνακα που καταλήγουμε στην ανάλυση δύο δειγμάτων (TWO-SAMPLE ANALYSIS) που είδαμε προηγουμένως.

Έτσι, για παράδειγμα, αν μας ενδιαφέρει να κατασκευάσουμε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για τον λόγο των διακυμάνσεων των χρόνων που χρειάζονται οι εργαζόμενοι να συναρμολογήσουν ένα αντικείμενο μετά από εκπαίδευση με δύο διαφορετικές μεθόδους εκπαίδευσης που είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, παρατηρούμε από τον πίνακα του STATGRAPHICS που ακολουθεί ότι, επιλέγοντας το 95% διάστημα εμπιστοσύνης, το διάστημα αυτό για τον λόγο των διακυμάνσεων είναι (SAMPLE 1 ÷ SAMPLE 2) (0.274262,5.43163) με 8 και 8 βαθμούς ελευθερίας αντίστοιχα.

TWO-SAMPLE ANALYSIS RESULTS

SAMPLE 1 SAMPLE 2
POOLED
SAMPLE STATISTICS: NUMBER OF OBS. 9 9 18
AVERAGE 35.2222 31.5556 33.3889
VARIANCE 24.4444 20.0278 22.2361
STD. DEVIATION 4.94413 4.47524 4.71552
MEDIAN 35 31 33

DIFFERENCE BETWEEN MEANS = 3.66667
CONF. INTERVAL FOR DIFF. IN MEANS: 95 PERCENT
(EQUAL VARS.)SAMPLE 1-SAMPLE 2 -1.04687 8.38021 16 D.F.
(UNEQUAL VARS.)SAMPLE 1-SAMPLE 2 -1.05066 8.38399 15.8 D.F.

RATIO OF VARIANCES = 1.22053
CONF. INTERVAL FOR RATIO OF VARIANCES: 95 PERCENT
SAMPLE 1 ÷ SAMPLE 2 0.274262 5.43163 8 8 D.F.

HYPOTHESIS TEST FOR H0: DIFF = 0 COMPUTED
t STATISTIC = 1.64948
VS ALT: NE SIG. LEVEL = 0.11854
AT ALPHA = .05 SO DO NOT REJECT H0.