ΚΕΦΑΛΑΙΟ 20

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΙΣ

ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ ΓΙΑ ΤΗΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ ΕΝΟΣ ΠΛΗΘΥΣΜΟΥ

Έχουμε ήδη δει στην εκτιμητική ότι αν ο υπό μελέτη πληθυσμός είναι κανονικός, τότε:

$$X^2 = \frac{\sum_{i=1}\left[X_i - \overline{X}\right]^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma^2} = \frac{nS^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n-1}$$

Επομένως, για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

ή της υπόθεσης

$$H_0 : \sigma^2 \geq \sigma_0^2$$

έναντι της υπόθεσης

$$H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$$

σε επίπεδο σημαντικότητας α, θα απορρίπτουμε την H_0 αν για την τιμή X_0^2 της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την H_0 έχουμε ότι

$$X_0^2 \equiv \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \equiv \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} < X^2_{n-1,\alpha}$$

Αντίστοιχα, για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 \text{ ή της } H_0 : \sigma^2 \leq \sigma_0^2$$

έναντι της υπόθεσης

$$H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$$

σε επίπεδο σημαντικότητας α, θα απορρίπτουμε την H_0 αν

$$X_0^2 \equiv \frac{nS^2}{\sigma_0^2} \equiv \frac{(n-1)S^{*2}}{\sigma_0^2} > X^2_{n-1,\alpha/2}$$

Τέλος, για τον έλεγχο της υπόθεσης

$$H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$$

έναντι της υπόθεσης

$$H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

θα απορρίπτουμε την H_0 σε επίπεδο σημαντικότητας α, αν

$$X_0^2 < X^2_{n-1,\alpha/2} \text{ ή αν } X_0^2 < X^2_{n-1,1-\alpha/2}$$

ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΤΩΝ ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΕΩΝ ΔΥΟ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΠΛΗΘΥΣΜΩΝ

Όπως είδαμε και στην περίπτωση της μελέτης ενός πληθυσμού, η συμπερασματολογία για την διακύμανση παίζει βασικό ρόλο σε πάρα πολλά πρακτικά προβλήματα.

Τα επιστημονικά όργανα, για παράδειγμα, θα πρέπει να δίνουν πολύ ακριβείς μετρήσεις με πάρα πολύ μικρό λάθος μετρήσεων. Το μηχάνημα που μετρά το ύψος ενός αεροπλάνου θα έχει πολύ μικρή αξία αν οι μετρήσεις που δίνει μπορεί να έχουν πολύ μεγάλη απόκλιση από το πραγματικό ύψος.

Η ανάγκη σύγκρισης των διακυμάνσεων σ_X^2, σ_Y^2 δύο πληθυσμών μπορεί να γίνει ακόμη περισσότερο προφανής. Πολλές φορές, χρειαζόμαστε να συγκρίνουμε την ακρίβεια κάποιου μηχανισμού μέτρησης σε σχέση με την ακρίβεια κάποιου άλλου μηχανισμού ή την σταθερότητα μιας διαδικασίας κατασκευής σε σχέση με μια άλλη ή ακόμα την απόκλιση στην βαθμολόγηση των φοιτητών ενός καθηγητή Πανεπιστημίου από έναν άλλο. Πέρα όμως από τις περιπτώσεις αυτές, υπάρχει και ένας άλλος λόγος που η σύγκριση των διακυμάνσεων δύο πληθυσμών είναι απαραίτητη. Είδαμε ήδη στις προηγούμενες ενότητες ότι, προκειμένου να προχωρήσουμε στην σύγκριση των μέσων δύο πληθυσμών με άγνωστες διακυμάνσεις, χρειάζεται να γνωρίζουμε αν οι διακυμάνσεις αυτές είναι ίσες, ή περίπου ίσες, ή όχι. Ανάλογα με την απάντηση στο ερώτημα αυτό, επιλέγουμε, όπως είδαμε, και κάποια στατιστική διαδικασία ελέγχου των μέσων.

Η συνήθης επομένως υπόθεση που χρειάζεται να ελέγξουμε είναι η,

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

Δοθέντος ότι, όπως έχουμε ήδη δει, έχουμε γνώση για την κατανομή στατιστικής συνάρτησης που αναφέρεται σε λόγο διακυμάνσεων (η F κατανομή), μπορούμε, ισοδύναμα, να γράψουμε την μηδενική υπόθεση ως,

$$H_0 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} = 1$$

Οι διάφορες μορφές εναλλακτικής υπόθεσης που μπορούμε να έχουμε είναι οι:

$$H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} < 1, \qquad H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \neq 1, \qquad H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1$$

Έχουμε ήδη δει, ότι η στατιστική συνάρτηση

$$\frac{\dfrac{S_X^{*2}}{\sigma_X^2}}{\dfrac{S_Y^{*2}}{\sigma_Y^2}} = \frac{\dfrac{nS_X^2}{(n-1)\sigma_X^2}}{\dfrac{mS_Y^2}{(m-1)\sigma_y^2}} \sim F_{n-1,\, m-1}$$

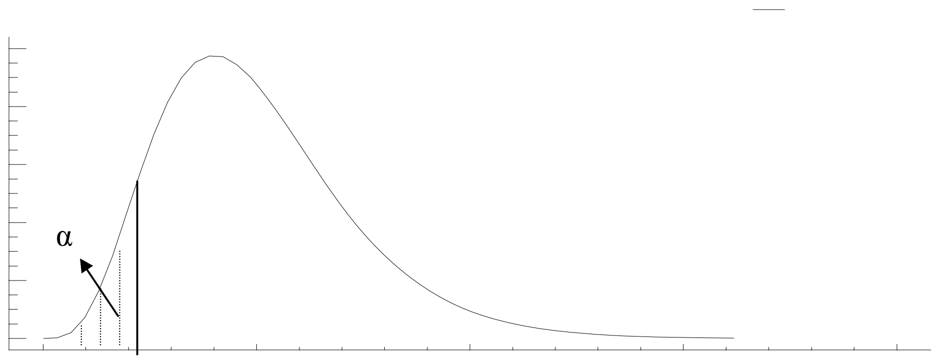
Επομένως, κάτω από τη μηδενική υπόθεση, η στατιστική συνάρτηση ελέγχου είναι η,

$$F = \frac{S_X^{*2}}{S_Y^{*2}} = \frac{\dfrac{nS_X^2}{(n-1)}}{\dfrac{mS_Y^2}{(m-1)}} \sim F_{n-1,\, m-1}$$

Για τις διάφορες εναλλακτικές υποθέσεις που προαναφέραμε θα έχουμε τους εξής κανόνες αποφάσεων:

1) Αν $H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} < 1$, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

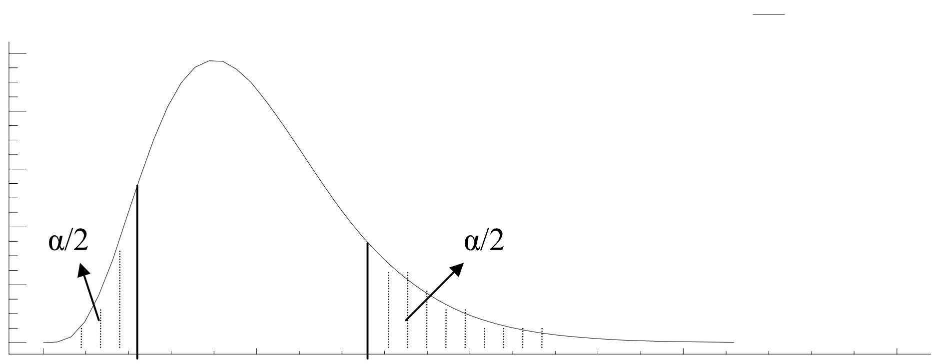
$$F < F_{n-1,\, m-1,\, \alpha} \equiv 1/F_{m-1, n-1, \alpha}$$



$F_{n-1,\, m-1,\, \alpha}$

2) Αν $H_1\ :\ \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} \neq 1$, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

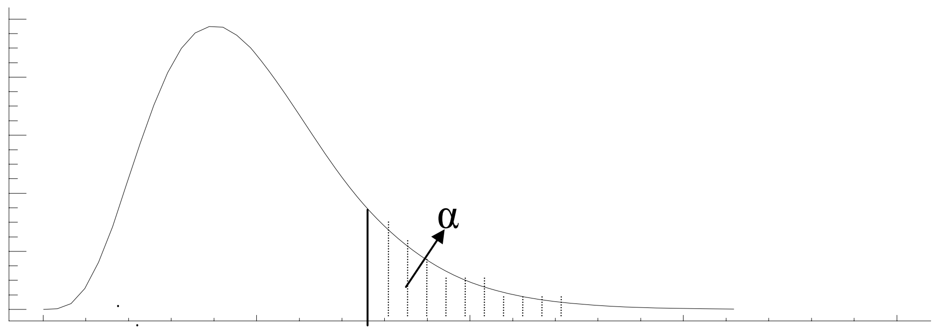
$$F < F_{n-1,\, m-1,\, \alpha} \equiv 1/F_{m-1,n-1,1-\alpha/2} \quad \text{ή} \quad \text{αν } F > F_{n-1,\, m-1,\, 1-\alpha/2}$$



$F_{n-1,\, m-1,\, \alpha}$ $F_{n-1,\, m-1,\, 1-\alpha/2}$

3) Αν $H_1\ :\ \dfrac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1$, απορρίπτουμε την μηδενική υπόθεση σε επίπεδο σημαντικότητας α αν

$$F > F_{n-1,\, m-1,\, 1-\alpha}$$



$F_{n-1,\, m-1,\, 1-\alpha}$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η προηγούμενη συμπερασματολογία είναι ότι τα δύο ανεξάρτητα δείγματα μεγέθους n, m, αντίστοιχα, προέρχονται από δύο *ανεξάρτητους κανονικούς πληθυσμούς*.

Παράδειγμα: Στο παράδειγμα με την συσκευασία προϊόντων σε δύο διαφορετικά εργοστάσια, είχαμε αναγκασθεί να υποθέσουμε, προκειμένου να προχωρήσουμε σε συμπερασματολογία για τις μέσες τιμές των δύο πληθυσμών, ότι οι διακυμάνσεις των δύο πληθυσμών ήταν ίσες. Φυσικά είναι απαραίτητο, πριν προχωρήσουμε σε συμπερασματολογία τέτοιας μορφής, να επιβεβαιώσουμε ότι η υπόθεση για τις διακυμάνσεις ισχύει. Στο παράδειγμα εκείνο, είχαμε δει ότι, από δύο δείγματα μεγέθους n = 25 και m = 20 από τους δύο πληθυσμούς, οι αμερόληπτες τυπικές αποκλίσεις των παρατηρήσεων ήταν

$$S_X^* = 167.1 \qquad \text{και} \qquad S_Y^* = 14.20$$

Ας υποθέσουμε ότι ο προϊστάμενος του εργοστασίου θέλει να ελέγξει την υπόθεση του κατά πόσον, από τις ενδείξεις αυτές, προκύπτει ότι υπάρχει μεγαλύτερη διακύμανση στις συσκευασίες του εργοστασίου Α από τις συσκευασίες του εργοστασίου Β.
Επομένως, η υπόθεση που θα πρέπει να ελεγχθεί είναι η

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$

$$H_1 : \frac{\sigma_X^2}{\sigma_Y^2} > 1$$

Έστω ότι θέλουμε να ελέγξουμε την υπόθεση αυτή σε επίπεδο σημαντικότητας α = 0.01.
Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την μηδενική υπόθεση είναι η,

$$F = \frac{(16.71)^2}{(14.20)^2} = 1.385$$

Από τους πίνακες της κατανομής F, έχουμε ότι

$$F_{24,\,19,\,.99} = 2.29$$

Με βάση τις παρατηρήσεις των δύο δειγμάτων, παρατηρούμε ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την μηδενική υπόθεση δεν βρίσκεται στην κρίσιμη περιοχή του ελέγχου και, επομένως, δεν έχουμε ενδείξεις για να απορρίψουμε την μηδενική υπόθεση.

Παράδειγμα: Σε ένα άλλο παράδειγμα που εξετάσαμε προηγουμένως, αναφερθήκαμε στην εξέταση του προβλήματος του κατά πόσο επηρεάζει η τοποθέτηση ενός προϊόντος τις πωλήσεις του προϊόντος αυτού. Και στη περίπτωση εκείνη είναι απαραίτητο να κάνουμε έναν έλεγχο υποθέσεων για την ισότητα των διακυμάνσεων στους δύο πληθυσμούς. Αν στη περίπτωση αυτή μας ενδιαφέρει να ελέγξουμε αν υπάρχει διαφορά στις διακυμάνσεις ή όχι, θα πρέπει να ελέγξουμε την υπόθεση

$$H_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$$
$$H_1 : \sigma_X^2 \neq \sigma_Y^2$$

Στο παράδειγμα εκείνο, είχαμε βρει ότι

$$S_X^{*2} = 945 \quad \text{και} \quad S_Y^{*2} = 17.37$$

Κάτω από την μηδενική υπόθεση, και για τις τιμές αυτές των αμερολήπτων δειγματικών διασπορών, η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου είναι η

$$F = \frac{945}{17.37} = 54.40$$

Τα κρίσιμα σημεία του ελέγχου για επίπεδο σημαντικότητας α = 0.05 είναι

$$F_{6,5,.975} = 6.98$$

$$F_{6,5,.025} = 1/F_{5,6,.975} = 1/5.97 = 0.167$$

Η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου κάτω από την μηδενική υπόθεση βρίσκεται σαφέστατα στην κρίσιμη περιοχή και, επομένως, με βάση τα στοιχεία της δειγματοληψίας, η μηδενική υπόθεση θα πρέπει να απορριφθεί. (Επομένως, στην περίπτωση αυτή, δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί η μέθοδος της σταθμισμένης δειγματικής διακύμανσης γιατί η υπόθεση για ισότητα των διακυμάνσεων των πληθυσμών δεν ισχύει).

Σημείωση: Εάν θέλουμε να χρησιμοποιήσουμε την διαδικασία με την p-τιμή από τους πίνακες έχουμε ότι,

$$P\,[F_{6,5} > 54.40] < 0.005$$

Επειδή έχουμε αμφίπλευρη εναλλακτική υπόθεση, η p-τιμή (παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας) για το πρόβλημα συτό είναι,

$$\text{p-τιμή} < 2\,(0.005) = 0.01$$

Επομένως, με βάση τα στοιχεία της δειγματοληψίας, η μηδενική υπόθεση θα πρέπει να απορρίπτεται σε οποιοδήποτε επίπεδο σημαντικότητας μεγαλύτερο του 0.01.

Σύγκριση Διακυμάνσεων και το Statgraphics

Το στατιστικό πακέτο Statgraphics δεν δίνει στην ανάλυση δύο δειγμάτων (TWO-SAMPLE ANALYSIS) έλεγχο για δύο διακυμάνσεις. Όπως όμως έχουμε δει και προηγουμένως, δίνει διαστήματα εμπιστοσύνης για τον λόγο δύο διακυμάνσεων. Τα διαστήματα αυτά μπορούν να χρησιμοποιηθούν και για τον έλεγχο στατιστικών υποθέσεων. Ας κοιτάξουμε, για παράδειγμα, το πρόβλημα της σύγκρισης των πωλήσεων ενός προϊόντος ανάλογα με την θέση όπου το προϊόν αυτό τοποθετείται στα καταστήματα. Έχουμε ήδη εξετάσει αναλυτικά το πρόβλημα αυτό τόσο για σύγκριση μέσων τιμών όσο και για σύγκριση διακυμάνσεων. Χρησιμοποιώντας την επιλογή TWO-SAMPLE ANALYSIS και εισάγοντας τα στοιχεία των παρατηρήσεων των δύο δειγμάτων για το πρόβλημα, παίρνουμε ως αποτέλεσμα τον πίνακα που ακολουθεί.

TWO-SAMPLE ANALYSIS RESULTS

	SAMPLE 1	SAMPLE 2	POOLED
SAMPLE STATISTICS: NUMBER OF OBS.	7	6	13
AVERAGE	121	89.1667	106.308
VARIANCE	945	17.3667	523.348
STD. DEVIATION	30.7409	4.16733	22.8768
MEDIAN	119	89.5	93

DIFFERENCE BETWEEN MEANS = 31.8333
CONF. INTERVAL FOR DIFF. IN MEANS: 95 PERCENT
(EQUAL VARS.) SAMPLE 1-SAMPLE 2 3.81299 59.8537 11 D.F.
(UNEQUAL VARS.) SAMPLE 1-SAMPLE 2 3.37436 6.3 D.F.

RATIO OF VARIANCES = 54.4146
CONF. INTERVAL FOR RATIO OF VARIANCES: 95 PERCENT
SAMPLE 1 ÷ SAMPLE 2 7.79835 325.775 6 5 D.F.

HYPOTHESIS TEST FOR H0: DIFF = 0 COMPUTED
t STATISTIC = 2.50115
VS ALT: NE SIG. LEVEL = 0.0294463
AT ALPHA = .05 SO REJECT H0.

Όπως βλέπουμε, ο πίνακας αυτός, εκτός από τις βασικότερες στατιστικές συναρτήσεις για καθένα από τα δείγματα (SAMPLE 1 και SAMPLE 2) και το σταθμισμένο δείγμα (POOLED), δίνει, στην δεύτερη ενότητα, την διαφορά των δειγματικών μέσων (DIFFERENCE BETWEEN MEANS) και, για το συγκεκριμένο επίπεδο εμπιστοσύνης που διαλέγουμε (στον πίνακα αυτό έχουμε διαλέξει το 95% διάστημα εμπιστοσύνσης), το διάστημα εμπιστοσύνης και τους βαθμούς ελευθερίας τόσο για την περίπτωση των ίσων διακυμάνσεων (EQUAL VARS) όσο και για την περίπτωση των ανίσων διακυμάνσεων (UNEQUAL VARS). Για την περίπτωση αυτή, ο αριθμός των βαθμών ελευθερίας (6.3) έχει υπολογισθεί με τον τύπο που προκύπτει από την μέθοδο Behrens-Fisher που παρουσιάσαμε στην αντίστοιχη ενότητα. Στην συνέχεια, δίνεται η τιμή της στατιστικής συνάρτησης για τον λόγο των διακυμάνσεων (RATIO OF VARIANCES) που επιβεβαιώνει την τιμή που έχουμε ήδη υπολογίσει (54.4146). Στην συνέχεια, δίνεται το διάστημα εμπιστοσύνης για τον λόγο των διακυμάνσεων στο επιλεγμένο επίπεδο (στην περίπτωσή μας 95% διάστημα εμπιστοσύνης) και εμφανίζεται ως απάντηση στο πεδίο (CONF. INTERVAL FOR RATIO OF VARIANCES) με τους αντίστοιχους βαθμούς ελευθερίας (6 5 D.F.). Αυτό το διάστημα εμπιστοσύνης μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για τον έλεγχο της μηδενικής υπόθεσης $H_0: \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$.

Πράγματι, παρατηρούμε ότι το συγκεκριμένο διάστημα εμπιστοσύνης (7.79835,325.775) δεν περιέχει την τιμή της στατιστικής συνάρτησης κάτω από την μηδενική υπόθεση ($\sigma_X^2/\sigma_Y^2 = 1$) και, επομένως, η υπόθεση αυτή θα πρέπει να απορριφθεί σε επίπεδο σημαντικότητας α=0.05.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι ο έλεγχος υποθέσεων που γίνεται στο τέλος του πίνακα αυτού και αναφέρεται στις μέσες τιμές των δύο πληθυσμών (HYPOTHESIS TEST FOR H : DIFF = 0 VS ALT: NE) που σημαίνει σε σχέση με την εναλλακτική υπόθεση H_1 : $\mu_X^2 \neq \mu_Y^2$ (*NE= not equal*) σε α = 0.05 (AT ALPHA = 0.05), αναφέρεται σε έλεγχο που γίνεται κάτω από την υπόθεση *ίσων διακυμάνσεων*.

Αυτό επιβεβαιώνεται από το γεγονός ότι η τιμή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου που δίνεται στον πίνακα (COMPUTED t STATISTIC) είναι t=2.50115 που προκύπτει αν χρησιμοποιηθεί η στατιστική συνάρτηση ελέγχου T με την χρησιμοποίηση της σταθμισμένης δειγματικής διασποράς S_p^{*2}.

Πράγματι, για την περίπτωση αυτή είναι

$$t = \frac{121 - 89.17}{\sqrt{\frac{523.348}{7} + \frac{523.348}{6}}} = 2.50$$

Η τιμή αυτή της στατιστικής συνάρτησης ελέγχου δίνει ως p-τιμή (παρατηρούμενο επίπεδο σημαντικότητας) σε σχέση με αμφίπλευρη εναλλακτική υπόθεση (VS ALT: NE) την τιμή 0.0294463 (SIG. LEVEL). Χρειάζεται, όμως, μεγάλη προσοχή γιατί, όπως συμβαίνει στην περίπτωσή μας, ο έλεγχος αυτός είναι λανθασμένος. Πράγματι, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον έλεγχο αυτον που στηρίζεται στην σταθμισμένη δειγματική διασπορά δοθέντος ότι έχει ήδη απορριφθεί η υπόθεση των ίσων διασπορών των πληθυσμών. Μόνο στην περίπτωση που δεν έχει απορριφθεί η υπόθεση των ίσων διασπορών των πληθυσμών, ο έλεγχος αυτός έχει έννοια και μπορεί να χρησιμοποιηθεί.