ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

ΒΑΣΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

ΜΕΘΟΔΟΙ ΑΠΑΡΙΘΜΗΣΗΣ

Πολλαπλασιαστική αρχή (multiplication rule). Έστω ότι ένα πείραμα E_1 έχει n_1 δυνατά αποτελέσματα. Έστω επίσης ότι για κάθε ένα από αυτά τα n δυνατά αποτελέσματα ένα πείραμα E_2 έχει n_2 δυνατά αποτελέσματα. Τότε το σύνθετο πείραμα E_1E_2 που αποτελείται από την πραγματοποίηση πρώτα του E_1 και κατόπιν του E_2 έχει n_1n_2 δυνατά αποτελέσματα.

Απόδειξη: Αν θωρήσουμε τον παρακάτω πίνακα.

E_2 \ E_1	1	2		n_1
1				
2				
.				
.				
.				
n_2				

Παρατηρούμε ότι το κάθε στοιχείο του πίνακα αυτού παριστά ένα διαφορετικό αποτέλεσμα του σύνθετου πειράματος E_1E_2. Είναι προφανές ότι ο πίνακας έχει $n_1 \times n_2$ στοιχεία.

Παράδειγμα: Κάποιος που χτίζει σπίτι χρειάζεται ταυτόχρονα ένα ηλεκτρολόγο και ένα υδραυλικό. Αν υπάρχουν 12 υδραυλικοί και 9 ηλεκτρολόγοι στην περιοχή, τα δυνατά ζευγάρια που μπορούν να εμφανισθούν είναι $N = 12 \times 9 = 108$.

Η πολλαπλασιαστική αρχή μπορεί να γενικευθεί για k πειραμάτα με τον εξής τρόπο:

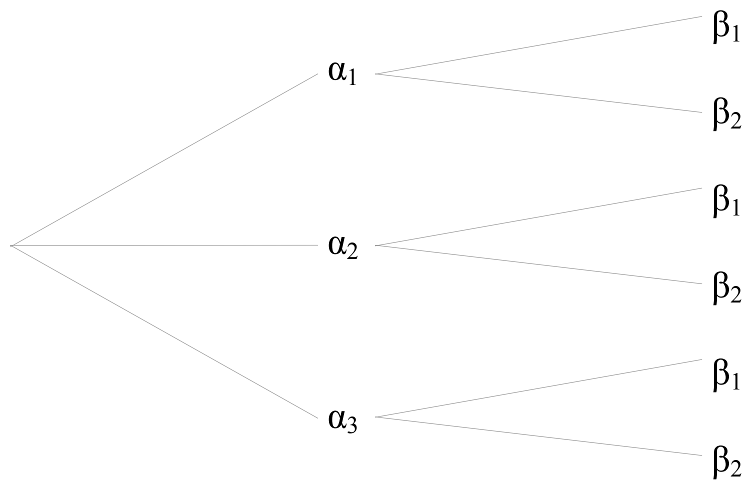
Έστω ότι ένα πείραμα E_1 έχει n_1 δυνατά αποτελέσματα. Έστω ότι για κάθε ένα από αυτά τα n_1 δυνατά αποτελέσματα ένα πείραμα

E_2 έχει n_2 δυνατά αποτελέσματα και ούτω κάθε εξής, το E_k έχει n_k δυνατά αποτελέσματα, για κάθε ένα από τα n_{k-1} αποτελέσματα του E_{k-1}, $k=2,3,...$. Τότε το σύνθετο πείραμα E_1 E_2 ... E_k που αποτελείται από την πραγματοποίηση πρώτα του E_1, κατόπιν του E_2 ... και τέλος του E_k έχει $n_1 x n_2 x .... x n_k$ δυνατά αποτελέσματα.

Απόδειξη: Με την μέθοδο της επαγωγής.

Σημείωση: Ένας άλλος τρόπος παρουσίασης της πολλαπλασιαστικής αρχής είναι ο εξής: Έστω ότι έχουμε k σύνολα από διαφορετικά στοιχεία, n_1 στο πρώτο σύνολο, n_2 στο δεύτερο κ.λ.π., n_k στο k σύνολο. Είναι δυνατό να φτιάξουμε $n_1 \times n_2 \times ... \times n_k$ διατεταγμένες ομάδες k στοιχείων που να περιέχουν ένα στοιχείο από κάθε σύνολο.

Ένας οπτικός τρόπος παρουσίασης της πολλαπλασιαστικής αρχής είναι το λεγόμενο *δενδρικό διάγραμμα*. Ας υπόθεσουμε ότι $k=2$ $n_1=3$ και $n_2=2$. O δειγματικός χώρος μπορεί να δοθεί με την μορφή ενός δένδρου που τα κλαδιά του είναι κομμένα κατά διαστήματα. Το πρώτο διάστημα κάθε κλαδιού δείχνει ένα δυνατό αποτέλεσμα του πρώτου πειράματος. Το δεύτερο, ένα δυνατό αποτέλεσμα του δεύτερου πείραματος κ.ο.κ. Στο παράδειγμα, ο συνολικός αριθμός των διακεκριμένων κλαδιών παριστά τον συνολικό αριθμό των τρόπων που το σύνθετο πείραμα μπορεί να εξελιχθεί.



Διατάξεις *(Permutations)*

Ορισμός: Έστω ότι το σύνολο S αποτελείται από n στοιχεία και έστω r ένας θετικός ακέραιος $r \le n$. Ενα διατεταγμένο σύνολο r διακεκριμένων στοιχείων του S $(k_1, k_2, ..., k_r)$ λέγεται *διάταξη (permutation) των n ανά r.*

Πρόταση: Ο συνολικός αριθμός των διατάξεων των n ανά r (συμβολίζεται με P(n,r) ή με $(n)_r$) είναι

$$P(n,r)=(n)_r = n(n-1)...(n-r+1)$$

Απόδειξη: Υπάρχουν n τρόποι να γεμίσει η πρώτη θέση του συνόλου. Στη συνέχεια υπάρχουν (n-1) τρόποι να γεμίσει η δεύτερη θέση κ.ο.κ., (n-r+1) τρόποι να γεμίσει η τελευταία θέση. Επομένως, σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή, υπάρχουν n(n-1)....(n-r+1) τέτοια σύνολα.

Σημείωση: Ένας άλλος ισοδύναμος τρόπος παρουσίασης του προβλήματος των διατάξεων είναι ο εξής: Έστω ότι υπάρχουν r θέσεις που θα πρέπει να γεμίσουν με r αντικείμενα που προέρχονται από n *διαφορετικά* αντικείμενα. Οι δυνατοί τρόποι που μπορεί να γίνει αυτό είναι P(n,r).

Παράδειγμα: Έστω ότι σημειώνουμε την ημέρα των γενεθλίων k ατόμων. Να υπολογισθεί η πιθανότητα τουλάχιστον δύο από αυτά να έχουν γενέθλια την ίδια ημερομηνία. (Αγνοούμε αυτούς που έχουν, πιθανώς, γεννηθεί στις 29 Φεβρουαρίου).

Λύση: Έχουμε $S = \{(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) : 1 \le \alpha_1 \le 365, \quad i = 1,2,.....k \}$.

Δηλαδή, το S είναι πεπερασμένο και μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα ενδεχόμενα του είναι ισοπίθανα. Έστω Ε={τουλάχιστον δύο άνθρωποι έχουν γενέθλια την ίδια ημερομηνία}. Ζητάμε την πιθανότητα P(E)=1-P(E΄) όπου Ε΄= {όλα τα άτομα έχουν γενέθλια σε διαφορετικές ημερομηνίες} και P(E΄)=N(E΄)/N. Από την πολλαπλασιαστική αρχή έχουμε ότι

$$N = \underbrace{365\times365\times...\times365}_{\text{k φορές}} = (365)^k$$

και από τον τύπο των διατάξεων

$$N(E') = P(365,k) = 365\times364\times...\times(365-k+1)$$

Επομένως

$$P(E) = 1 - \frac{365\times364\times...\times(365-k+1)}{(365)^k}$$

Ο παρακάτω πίνακας δίνει την τιμή της P(E) για διάφορες τιμές του k.

Πίνακας

k	P(E)	k	P(E)
2	0.0027	20	0.4114
3	0.0082	21	0.4437
4	0.0164	22	0.4757
5	0.0271	23	0.5073
6	0.0405	24	0.5383
7	0.0562	25	0.5687
8	0.0743	26	0.5982
9	0.0946	27	0.6269
10	0.1170	28	0.6545
11	0.1411	29	0.6810
12	0.1670	30	0.7063
13	0.1944	40	0.8912
14	0.2231	50	0.9704
15	0.2592	60	0.9941
16	0.2836	70	0.9992
17	0.3150	80	0.9999
18	0.3469	90	1.0000
19	0.3791	100	1.0000

Είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι αν k=60, είναι σχεδόν βέβαιο (P(E)=0.9941) ότι ανάμεσά τους θα υπάρχουν τουλάχιστον δύο με την ίδια ημερομηνία γενεθλίων.

Πόρισμα: $P(n,r) = n!/(n-r)!$

Απόδειξη: Προφανής.

Πόρισμα: Αν $n=r$ τότε $P(n,n)=n!$ (όπου εξ ορισμού $0!=1$) και τότε μιλάμε για μεταθέσεις n (διακεκριμένων) αντικειμένων.

Συνδυασμοι *(Combinations)*

Στην μέχρι τώρα συζήτησή μας στην συνδυαστική, η *σειρά* με την οποία επιλέγαμε τα διάφορα στοιχεία έπαιζε σημαντικό ρόλο στο αποτέλεσμα. Υπάρχουν όμως και περιπτώσεις που μας ενδιαφέρουν μόνο τα στοιχεία που επιλέγουμε και όχι η σειρά με την οποία επιλέγονται.

Ορισμός: Έστω ότι ένα σύνολο S περιέχει n στοιχεία. Ένα υποσύνολο του S από r στοιχεία είναι ένας *συνδυασμός* των n ανά r. Το σύνολο των διαφορετικών συνδυασμών των n ανά r συμβολίζεται με $\binom{n}{r}$ ή C_r^n ή $C(r,n)$.

Θα πρέπει να τονισθεί ότι δύο συνδυασμοί θεωρούνται διαφορετικοί αν διαφέρουν σ' ένα τουλάχιστον στοιχείο και όχι αν έχουν τα ίδια στοιχεία, αλλά σε διαφορετική διάταξη. (Η σειρά δηλαδή δεν ενδιαφέρει εδώ).

Θεώρημα: $$\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\dots(n-r+1)}{r!}.$$

Απόδειξη: Για κάθε έναν από τους $\binom{n}{r}$ συνδυασμούς υπάρχουν $r!$ διατάξεις των r στοιχείων που έχουν επιλεγεί. Επομένως, το σύνολο των δυνατών διατάξεων είναι $P(n,r) = \binom{n}{r} r!$.

Επομένως,

$$\binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{(n)_r}{r!}$$

Πόρισμα: $\binom{n}{r} = \dfrac{n!}{r!(n-r!)}$.

Απόδειξη: Προφανής.

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο αριθμός των τριμελών επιτροπών που είναι δυνατόν να ορισθούν από ένα σύνολο 8 ατόμων.

Λύση: $\binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!5!} = 56$.

Ιδιότητα: $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$.

Απόδειξη: Προφανής.

Σημείωση: Ο αριθμός $\binom{n}{r}$ ονομάζεται και διωνυμικός συντελεστής γιατί παρουσιάζεται σαν συντελεστής στο διωνυμικό ανάπτυγμα $(\alpha + \beta)^n = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} \alpha^r \beta^{n-r}$.

Οι συνδυασμοί των n ανά r μπορούν να θεωρηθούν και σαν τρόποι διαμέρισης ενός συνόλου n στοιχείων σε δύο υποσύνολα εκ των οποίων το ένα να περιέχει r στοιχεία και το άλλο τα υπόλοιπα n-r. (Οι διαφορετικές διαμερίσεις της μορφής αυτής είναι ακριβώς $\binom{n}{r}$).

Η έννοια αυτή μπορεί να επεκταθεί σε διαμερίσεις περισσοτέρων υποσυνόλων ως εξής:

Πολυωνυμικός Συντελεστής

Έστω ότι ένα σύνολο από n στοιχεία μπορεί να χωρισθεί σε k υποσύνολα έτσι ώστε το πρώτο υποσύνολο να περιέχει n_1 στοιχεία, το δεύτερο n_2 στοιχεία κ.ο.κ., το k υποσύνολο n_k στοιχεία, $(n_1+n_2+\ldots+n_k)=n$. Έστω $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ οι δυνατοί τρόποι (διάφοροι μεταξύ τους) που αυτό μπορεί να γίνει.

Θεώρημα: $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \dfrac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}$

Απόδειξη: Οι δυνατοί τρόποι για να επιλεγούν τα n_1 στοιχεία του πρώτου υποσυνόλου είναι $\binom{n}{n_1}$. Οι δυνατοί τρόποι για να επιλεγούν τα n_2 στοιχεία του δεύτερου υποσυνόλου είναι $\binom{n-n_1}{n_2}$ κ.ο.κ.. Οι δυνατοί τρόποι για να επιλεγούν τα n_k στοιχεία του τελευταίου υποσυνόλου είναι $\binom{n-(n_1+n_2+\ldots+n_{k-1})}{n_k} = \binom{n_k}{n_k}$.

Σύμφωνα με την πολλαπλασιαστική αρχή,

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k} = \binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\ldots\binom{n_k}{n_k}$$

Όμως, ισχύει ότι

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2} = \frac{n!}{n_1!(n-n_1)!}\frac{(n-n_1)!}{n_2!(n-n_1-n_2)!} = \frac{n!}{n_1! n_2!(n-n_1-n_2)!}$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, καταλήγουμε στον τύπο που θέλουμε να αποδείξουμε.

Σημείωση: Ο αριθμός $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_k}$ λέγεται *πολυωνυμικός συντελεστής* γιατί εμφανίζεται στο πολυωνυμικό ανάπτυγμα

$$(\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k)^n = \sum_{n_1}\sum_{n_2}\ldots\sum_{n_k}\frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}\alpha_1^{n_1}\alpha_2^{n_2}\ldots\alpha_k^{n_k}$$

Όλοι οι προηγούμενοι κανόνες απαρίθμησης είναι δυνατόν να ερμηνευθούν και μέσω δύο άλλων σχημάτων. Το ένα αναφέρεται στην τοποθέτηση σφαιριδίων σε υδρίες και το δεύτερο σε δειγματοληψία από πληθυσμό.

Για περισσότερες πληροφορίες και παραδείγματα πάνω στις έννοιες αυτές ο αναγνώστης που ενδιαφέρεται παραπέμπεται στο κλασσικό βιβλίο του W. Feller (1971).

Δύο Γενικά Παραδείγματα

Αριθμοί πιστωτικών καρτών: Οι γνώστες των βασικών αρχών των πιθανοτήτων πολλές φορές αναρωτιούνται γιατί οι επιχειρήσεις των πιστωτικών καρτών χρησιμοποιούν τόσα πολλά ψηφία για τις κάρτες των πελατών τους. (Είναι γνωστό ότι μέχρι πρόσφατα στις ΗΠΑ, η Visa χρησιμοποιούσε 13 ψηφία, η American Express 15 ψηφία και η Mastercard 20 ψηφία).

Αυτό, γιατί είναι γνωστό ότι ένας αριθμός με ένα μόνο ψηφίο μπορεί να πάρει δέκα τιμές (0,1,2,…,9). Για ένα διψήφιο αριθμό, όπως το 52, υπάρχουν δέκα δυνατότητες για την επιλογή του πρώτου ψηφίου και για κάθε μια από τις δέκα αυτές δυνατότητες υπάρχουν δέκα δυνατότητες για την επιλογή του δευτέρου ψηφίου. Συνολικά, δηλαδή υπάρχουν 10^2=100 δυνατές τιμές για ένα διψήφιο αριθμό. (Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε να πούμε ότι υπάρχουν 100 δυνατότητες από το 00 έως το 99). Για ένα αριθμό με τρία ψηφία, υπάρχουν 10^3 =1000 δυνατές τιμές. Για ένα αριθμό με πέντε ψηφία, υπάρχουν 10^5 = 10 000 δυνατές τιμές.

Ο αριθμός των δυνατών συνδυασμών που μπορούμε να έχουμε για ένα δεκαψήφιο αριθμό είναι 10^{10} = 10 000 000. Ο αριθμός αυτός των συνδυασμών είναι αρκετός για να μας δώσει ένα μονοσήμαντα ορισμένο δεκαψήφιο προσδιοριστικό αριθμό για κάθε άνθρωπο που είναι ζωντανός αυτή την στιγμή στον πλανήτη ή που θα γεννηθεί στα επόμενα σαράντα χρόνια!

Ποιός είναι λοιπόν ο λόγος που οι πιστωτικές κάρτες χρησιμοποιούν τόσα πολλά ψηφία προκειμένου να προσδιορίζουν τους πελάτους τους; Το ερώτημα αυτό γίνεται ευρύτερο αν σκεφθεί κανείς ότι οι χρησιμοποίηση τόσου μεγάλου αριθμού ψηφίων κάνει περισσότερο πιθανό ένα λάθος από πλευράς των υπαλλήλων που καταγράφουν τον αριθμό της κάρτας, όταν αυτή χρησιμοποιείται.

Ο λόγος που χρησιμοποιούνται περισσότερα ψηφία από όσα στην πραγματικότητα χρειάζονται για τον μονοσήμαντο προσδιορισμό των χρηστών πιστωτικών καρτών είναι ότι οι επιχειρήσεις, που τις χρησιμοποιούν, θέλουν να ελαχιστοποιήσουν την πιθανότητα ένας αριθμός που καταγράφεται να ανήκει σε κάποιον άλλο χρήστη της κάρτας από αυτόν στον οποίο πραγματικά η κάρτα ανήκει. Έτσι τα είκοσι ψηφία της Mastercard μπορούν να δημιουργήσουν 10^{20} δυνατούς αριθμούς, από τους οποίους τα 75 περίπου εκ. αντιστοιχούνται με τυχαίο τρόπο στους κατόχους των καρτών. Έτσι, αν ένας υπάλληλος κάνει λάθος στην καταγραφή του αριθμού, η πιθανότητα ότι αυτός ο λανθασμένος αριθμός θα ανήκει σε κάποιο πραγματικό χρήστη κάρτας είναι

$$\frac{75000000}{10^{20}}=\frac{7.5}{10^{13}}$$

Η πιθανότητα αυτή, δηλαδή, είναι μικρότερη από το 1 στο τρισεκατομμύριο!

Έτσι, σχεδόν σε κάθε περίπτωση που δίνεται ένας λανθασμένος αριθμός, ο υπολογιστής τον απορρίπτει και ζητά από τον υπάλληλο να ξαναπροσπαθήσει.

Ακόμα και στην περίπτωση της κάρτας Visa με τον σχετικά μικρό αριθμό των 13 ψηφίων, η πιθανότητα ότι ένας τυχαία επιλεγμένος αριθμός θα ανήκει στον κάτοχο κάποιας κάρτας είναι μικρότερη από 1/100000 ($P<0.00001$).

Με τον τρόπο αυτό, οι εταιρείες πιστωτικών καρτών εκμηδενίζουν ουσιαστικά την πιθανότητα λάθους εις βάρος του πελάτη.

Πιθανότητες στο τάβλι: Η καλή γνώση των πιθανοτήτων, άμεση ή έμμεση, παίζει σημαντικό ρόλο στην επιτυχή απόδοση στο τάβλι! Οι περισσότεροι από τους καλούς παίκτες στο παιχνίδι αυτό έχουν ισχυρό μαθηματικό υπόβαθρο. Αλλοι, επίσης καλοί, χρησιμοποιούν έμμεσα τους κανόνες των πιθανοτήτων μετά από μακροχρόνια εμπειρία.

Όπως είναι προφανές, στο τάβλι τα δυνατά αποτελέσματα όταν ρίχνουμε τα δύο ζάρια είναι 36 (6 δυνατά αποτελέσματα για το πρώτο ζάρι και 6 για δεύτερο, που δημιουργούν 6x6=36 δυνατά αποτελέσματα). Είναι επίσης γνωστό ότι, στο παιχνίδι αυτό, ρίχνουμε δύο ζάρια και χρησιμοποιούμε κάθε αριθμό ξεχωριστά για να μετακινήσουμε ένα πούλι. Αν, για παράδειγμα, το αποτέλεσμα στο ρίξιμο των ζαριών είναι 5-3, μπορούμε να μετακινήσουμε ένα πούλι κατά πέντε θέσεις και ένα άλλο πούλι (ενδεχομένως και το ίδιο το προηγούμενο) κατά τρείς θέσεις. Είναι επίσης γνωστό ότι, στις “διπλές”, ο αριθμός των κινήσεων διπλασιάζεται. Όταν, για παράδειγμα, το αποτέλεσμα είναι “εξάρες” (δύο έξι), μπορούμε να μετακινήσουμε τέσσερα πούλια κατά έξι θέσεις το καθένα.

Ένα από τα βασικά προβλήματα στο τάβλι είναι να εξετάσουμε εάν είναι πιο ασφαλές να αφήσουμε ένα πούλι μόνο του μια θέση ή δύο θέσεις μακριά από ένα πούλι του αντιπάλου. Ισοδύναμα, θα μπορούσε κανείς να αναρωτηθεί, εάν είναι περισσότερο πιθανό για τον αντίπαλό μας να μας “χτυπήσει” όταν βρισκόμαστε σε απόσταση μιας θέσης ή δύο θέσεων.

Για να κινήσει ένα πούλι κατά μια θέση, ο αντίπαλος θα πρέπει να φέρει “άσσο” σε ένα από τα δύο ζάρια. Οι πιθανοί τρόποι που αυτό μπορεί να γίνει είναι 1-1, 1-2, 1-3, 1-4, 1-5, 1-6, 2-1, 3-1, 4-1, 5-1, 6-1. (Παρατηρούμε ότι δεν μετράμε το 1-1 δύο φορές).

Συνολικά, επομένως, υπάρχουν έντεκα τρόποι για να έλθει “άσσος” και, επομένως, η πιθανότητα να μας χτυπήσει ο αντίπαλος που βρίσκεται μια θέση μακριά είναι 11/36.

Για να βρούμε την πιθανότητα να μας χτυπήσει ο αντίπαλος που βρίσκεται δύο θέσεις μακριά, παρατηρούμε ότι θα πρέπει να φέρει “δύο” στο ένα ζάρι (υπάρχουν έντεκα διαφορετικοί τρόποι για αυτό) ή δύο άσσους (ένας τρόπος). Συνολικά, επομένως, υπάρχουν δώδεκα τρόποι για να γίνει αυτό και η πιθανότητα είναι 12/36. Επομένως, είναι ελαφρώς ασφαλέστερα να βρίσκεται κανείς μια θέση μακρύτερα από τον αντίπαλό του παρά δύο θέσεις μακρύτερα.

Αν ένα πούλι είναι τρεις θέσεις μακριά από το πούλι ενός αντιπάλου, ο αντίπαλος θα πρέπει να ρίξει ή “τρία” στο ένα ζάρι (έντεκα τρόποι) ή “άσσο” στο ένα ζάρι και “δύο” στο άλλο (δύο τρόποι) ή “άσσους” (ένας τρόπος). Η συνολική πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού είναι 14/36. Με όμοιους υπολογισμούς, οι πιθανότητες για 4, 5, 6 θέσεις μακριά είναι 15/36, 16/36, 17/36, αντίστοιχα.

Όταν το πούλι του αντιπάλου είναι περισσότερες από έξι θέσεις μακριά, οι πιθανότητες μειώνονται δεδομένου ότι απαιτείται και από τα δύο ζάρια να δώσουν άθροισμα 7 ή μεγαλύτερο. Όπως φαίνεται στον πίνακα που ακολουθεί, η πιθανότητα για άθροισμα 7 είναι μόνο 6/36, δηλαδή 1/6. Αν το πούλι του αντιπάλου είναι 8 θέσεις μακριά, ο αντίπαλος θα πρέπει να έχει ζαριά με άθροισμα 8 (έξι τρόποι, όπως μπορεί να υπολογισθεί) ή να ρίξει “διπλές” δίνοντας μια συνολική πιθανότητα 6/36. Στην περίπτωση που το πούλι του αντιπάλου είναι 9 θέσεις μακριά υπάρχουν τέσσερις τρόποι για να φέρει κανείς άθροισμα 9 και μια φορά “τριάρες”, δίνοντας συνολική πιθανότητα 5/36. Υπάρχουν τρεις τρόποι να φέρει κανείς άθροισμα 10 και δύο τρόποι να φέρει άθροισμα 11. Για την περίπτωση που ο αντίπαλος είναι δώδεκα θέσεις μακριά, αυτό μπορεί να γίνει ή με “εξάρες” ή με “τεσσάρες” ή ακόμα και με “τριάρες”. Η πιθανότητα αυτή είναι 3/36.

Αριθμός θέσεων μακριά	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Πιθανότητα να χτυπηθεί	11/36	12/36	14/36	15/36	11/36	17/36	6/36	6/36	5/36	3/36	2/36	3/36