ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ ΚΑΙ ΑΠΟΚΛΙΣΗΣ

ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ

Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή, και έστω ότι το $P(X=x)=p_X$ καθορίζει ένα τυχαίο πείραμα. Ένα ερώτημα που τίθεται συχνά είναι το εξής: Τί θα συμβεί μακροπρόθεσμα εάν επαναλάβουμε το πείραμα πολλές φορές; (Υπάρχει κάποια ποσότητα που μπορεί να θεωρηθεί σταθερή;)

Για να εξηγήσουμε καλύτερα το πρόβλημα ας δώσουμε ένα παράδειγμα.

Παράδειγμα: Έστω ότι στρίβουμε ένα μεροληπτικό νόμισμα που έχει τις εξής πιθανότητες:

$$P(K) = 3/5, \quad P(\Gamma) = 2/5$$

Έστω οτι παίζουμε το εξής παιγνίδι: Κερδίζουμε δύο δραχμές αν το αποτέλεσμα είναι Γ και χάνουμε μια δραχμή αν είναι Κ. Τί περιμένουμε να συμβεί μακροπρόθεσμα; (Μας συμφέρει αυτό το παιχνίδι;)

Λύση: Αν παίξουμε το παιχνίδι αυτό αρκετές φορές περιμένουμε 3/5 από τις φορές αυτές, κατά προσέγγιση, να χάσουμε μια δραχμή και 2/5, κατά προσέγγιση, να κερδίσουμε δύο δραχμές. Έστω ότι παίζουμε το παιχνίδι n φορές. Το κατά προσέγγιση, κέρδος (ζημιά) θα είναι:

$$(-1)n(3/5)+2n(2/5) = n(1/5)$$

Και επομένως, το μέσο κέρδος (ζημιά) θα είναι, κατά προσέγγιση

$$(n/n)(1/5) = 1/5$$

είναι μια σταθερή ποσότητα (ανεξάρτητη του n). Μπορούμε να παρουσιάσουμε καλύτερα το πρόβλημα αν χρησιμοποιήσουμε την έννοια της τυχαίας μεταβλητής. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή X ως εξής:

$$X = \begin{cases} -1 & (\text{αν το αποτέλεσμα είναι Κ}) \\ 2 & (\text{αν το αποτέλεσμα είναι Γ}). \end{cases}$$

Τότε το αναμενόμενο κέρδος (ζημιά) θα είναι:

$$(-1)\, P(X = -1) + 2P(X = 2) = 1/5$$

Γενικά, μπορούμε να δώσουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός: Έστω X μια διακριτή τυχαία μεταβλητή με κατανομή πιθανότητας P_X. Η σταθερή ποσότητα

$$\sum_x xP(X = x)$$

αν υπάρχει, λέγεται *μέση τιμή (mean value) ή αναμενόμενη τιμή (expected value)* της τυχαίας μεταβλητής X ή *μαθηματική ελπίδα (mathematical expectation)* της X και συμβολίζεται με E(X) ή με μ_X ή με μ. Προφανώς η E(X) υπάρχει αν η σειρά $\sum_x xP(X = x)$ συγκλίνει. Η τιμή της E(X) δεν είναι υποχρεωτικά μια απο τις τιμές που παίρνει η X.

Παράδειγμα: Ο τροχός της ρουλέτας, σε ορισμένες χώρες, έχει 38 θέσεις με τους αριθμούς 0, 00, 1, 2, ..., 36. Αν ο παίκτης στοιχηματίζει μια δραχμή σε οποιονδήποτε από τους αριθμούς 1 έως 36 και κερδίσει (δηλαδή ο τροχός σταματήσει στον αριθμό αυτό) παίρνει πίσω 36 δραχμές. Αλλιώς χάνει την δραχμή. Έστω X το καθαρό κέρδος του παίκτη σε μια στροφή. Οι τιμές του X είναι +35 και -1 και οι αντίστοιχες πιθανότητες είναι

$$P(X=35) = 1/38 \quad \text{και} \quad P(X = -1) = 37/38$$

Επομένως

$$E(X) = (35)(1/38) - (1)(37/38) = -1/19$$

Δηλαδή ο παίκτης του καζίνου περιμένει να χάσει 1/19 της κάθε δραχμής που παίζει. Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι το παιχνίδι θα ήταν δίκαιο αν δεν υπήρχαν οι δύο αριθμοί 0 και 00. Τότε η κατανομή πιθανότητας της X θα ήταν

$$P(X=35) = 1/36 \qquad \text{και} \qquad P(X = -1) = 35/36$$

και τότε

$$E(X) = (35)(1/36) - (1)(35/36) = 0$$

Παράδειγμα: Η αντιδικία του Pascal με τον Chevalier de Méré για πίστη στην ύπαρξη Θεού στηρίζεται στην έννοια της μέσης τιμής. Το επιχείρημα του Pascal ήταν ότι και αν ακόμα η πιθανότητα p ύπαρξης του Θεού, ήταν πολύ μικρή, το αναμενόμενο κέρδος από το να πιστεύει κανείς στην ύπαρξη του Θεού, στην αιώνια ευτυχία, είναι τόσο μεγάλο που δικαιολογεί την πίστη αυτή. Και αυτό γιατί, κατά τον Pascal, η ποσότητα p∗(αιώνια ευτυχία)+(1-p)∗(μηδενικότητα) είναι εξαιρετικά μεγάλη, ανεξάρτητα από το πόσο μικρό είναι το p.

Γενικά, αν P(x) είναι η κατανομή πιθανότητας της (διακριτής) τυχαίας μεταβλητής X και u(X) είναι μια συνάρτηση του X, τότε η μέση τιμή της u(X) είναι

$$E(u(X)) = \sum_{x} u(x)\, P(x)$$

εφ' όσον βέβαια η σειρά συγκλίνει. (Δηλαδή η E(u(x)) μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέντρο βάρους της u(X) με βάρη τα P(x)). Θα πρέπει να τονισθεί εδώ ότι η παραπάνω σχέση δεν είναι ορισμός αλλά αποτελεί θεώρημα, η απόδειξη του οποίου θα δοθεί σε άλλη ενότητα.

Παράδειγμα: Ένα περίπτερο παίρνει κάθε βδομάδα 4 αντίτυπα από ένα νέο περιοδικό που κυκλοφόρησε τελευταία. Έστω X η ζήτηση για το περιοδικό με κατανομή πιθανότητας

$$F(x) = \begin{cases} 1/15 & x = 1 \\ 2/15 & x = 2.6 \\ 3/15 & x = 3.5 \\ 4/15 & x = 4 \end{cases}$$

Ο αριθμός των αντιτύπων που μένουν απούλητα στο τέλος της εβδομάδας είναι:

$$u(X) = \max(4-X, 0)$$

Επομένως, ο αναμενόμενος αριθμός απούλητων αντιτύπων στην εβδομάδα είναι

$$E(u(X)) = \Sigma\, u(x)\, P(x) = \sum_{x=1}^{6} \max(4-x, 0)\, P(x) =$$

$$= 3(1/15) + 2(2/15) + 1(3/15) + 0(4/15) + 0(3/15) + 0(2/15) = 2/3$$

Σημείωση: Η μέση τιμή μπορεί να θεωρηθεί ως μια ειδική περίπτωση μιας γενικότερης περιοχής των πιθανοτήτων που μελετά μετασχηματισμούς τυχαίων μεταβλητών.

Παράδειγμα χρήσης της έννοιας της μέσης τιμής στο basketball: Όπως είναι γνωστό, στο παιχνίδι του Basketball εάν ένας παίκτης επιχειρήσει σουτ τριών πόντων και στην προσπάθεια του γίνει από αντίπαλο φάουλ, τότε, αν η προσπάθεια αποτύχει, ο παίκτης δικαιούται να σουτάρει τρεις ελεύθερες βολές. Αν η προσπάθεια πετύχει, δικαιούται να σουτάρει μια ακόμα ελεύθερη βολή.

Στοιχεία από το NBA, που συγκεντρώθηκαν το 1990 για τους δώδεκα καλύτερους παίκτες του πρωταθλήματος αυτού, έδειξαν ότι αυτοί είχαν 36.4% επιτυχία στα σουτ 3 πόντων και 79.9% επιτυχία στις ελεύθερες βολές. (Tyler Hokama: Fros & Treys: A study in Shooting. Pomona College, Spring 1990).

Ένα ενδιαφέρον πρόβλημα είναι πώς θα πρέπει να αντιμετωπίσει μια ομάδα που προηγείται με 2-3 πόντους και αμύνεται από άποψη τακτικής επιθετικό της αντίπαλης ομάδας που ετοιμάζεται να κάνει σουτ 3 πόντων. Θα πρέπει να τον αφήσει να το επιχειρήσει ή είναι προτιμότερο να κάνει φάουλ, επιτρέποντας 3 ελεύθερες βολές στον επιθετικό;

Σύμφωνα με τον πολλαπλασιαστικό κανόνα (ισχύει στην περίπτωση αυτή (;)), η πιθανότητα επιτυχίας και στις 3 ελεύθερες βολές είναι $(0.799)^3 = 0.510$.

Η τιμή αυτή είναι σημαντικά υψηλότερη από την τιμή 0.364 που αναφέρεται στην πιθανότητα επιτυχίας σε σουτ 3 πόντων.

Η μέση τιμή επιτυχίας σε βολές 3 πόντων βρίσκεται από το δεδομένο ότι, σε κάθε σουτ 3 πόντων, υπάρχουν δύο δυνατά ενδεχόμενα (3 πόντοι ή κανείς) πολλαπλασιασμένα με τις αντίστοιχες πιθανότητες.

Έτσι, αν X είναι ο αριθμός των επιτυχών τρίποντων, τότε $\mu_1 = E(X) = (3)(0.364) + (0)(0.636) = 1.092$. Από το άλλο μέρος, κάθε

ελεύθερη βολή έχει δύο δυνατά αποτελέσματα, 1 πόντο ή κανένα με αντίστοιχες πιθανότητες 0.799 και 1-0.799=0.201.
Επομένως, αν Y είναι ο αριθμός των επιτυχιών στις ελεύθερες βολές, τότε

$$\mu_2 = E(Y) = (1)(0.799) + (0)(0.201) = 0.799$$

Επομένως, η μέση τιμή επιτυχιών σε ελεύθερες βολές 3 σουτ είναι

$$3(0.799) = 2.397$$

Βλέπουμε, δηλαδή, ότι με το να κάνει κανείς φάουλ στον επιθετικό που επιχειρεί σουτ 3 πόντων, αυξάνει τις πιθανότητες του επιτιθέμενου να επιτύχει καλύτερο αποτέλεσμα στο παιχνίδι, αφού του δίνει μέσο αριθμό επιτυχίων σε 3 βολές 2.397. Εξάλλου, δημιουργεί την πιθανότητα επιτυχίας 4 πόντων (αν ο παίκτης πετύχει το τρίποντο και στην συνέχεια πετύχει και τον πόντο από φάουλ).

Το συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι, στατιστικά, οι αμυντικοί θα πρέπει να αποφεύγουν τα φάουλ στην περίπτωση σουτ 3 πόντων.

Ιδιότητες της Μέσης Τιμής

Θεώρημα: Εάν c_1 και c_2 είναι σταθερές και $u_1(X)$, $u_2(X)$ είναι συναρτήσεις της τυχαίας μεταβλητής X τότε

$$E[c_1u_1(X) + c_2u_2(X)] = c_1 E[u_1(X)] + c_2 E[u_2(X)].$$

Απόδειξη: $E[c_1u_1(X) + c_2u_2(X)] = \sum_x [c_1u_1(x) + c_2u_2(x)] P(x)$

$$= c_1E[u_1(X)] + c_2E[u_2(X)].$$

Πόρισμα: $E(c)=c$ και $E[cu(X)] = cE[u(X)]$.
Αποδειξη: Προφανής.

Είναι προφανές, από το παραπάνω θεώρημα, ότι η μέση τιμή είναι ένας γραμμικός τελεστής.

Αν η τυχαία μεταβλητή X είναι συνεχής, η μέση τιμή ορίζεται αντίστοιχα αν αντικαταστήσουμε το σύμβολο της άθροισης με το σύμβολο της ολοκλήρωσης.

Ορισμός: Έστω X μια (απόλυτα) συνεχής τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f(x). Ορίζουμε σαν μέση τιμή της X το ολοκλήρωμα (αν υπάρχει)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$$

Η E(X) υπάρχει αν $\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)dx < +\infty$.

Οι ιδιότητες της μέσης τιμής που ισχύουν για διακριτές τυχαίες μεταβλητές, ισχύουν και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Αποδεικνύονται δε με τον ίδιο τρόπο αν κανείς αντικαταστήσει την άθροιση με ολοκλήρωση και τη συνάρτηση πιθανότητας με τη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας.

Παράδειγμα: Έστω οτι ο χρόνος ζωής X (σε ώρες) ενός ορισμένου τύπου ηλεκτρονικών λυχνιών ακολουθεί μια συνεχή κατανομή με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$F(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{-t/1000}}{1000}, & \text{εάν} \quad t \geq 0 \\ 0, & \text{εάν} \quad t < 0 \end{cases}$$

Να αποδειχθεί ότι η f(t) είναι πραγματικά μια συνάρτηση πυκνότητας και να βρεθεί ο μέσος χρόνος ζωής των λυχνίων αυτών.

Απάντηση: $f(t) \geq 0$.

Επίσης,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t/1000}}{1000} dt = -e^{-t/1000} \Big|_0^{\infty} = 1$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = \int_0^{+\infty} te^{-t/1000}\, dt =$$

$$= -te^{-t/1000} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t/1000}\, dt = 1000$$

Επομένως ο μέσος χρόνος ζωής των λυχνιών είναι 1000 ώρες.

ΔΙΑΜΕΣΟΣ, ΕΠΙΚΡΑΤΟΥΣΑ ΤΙΜΗ, ΠΟΣΟΣΤΙΑΙΑ ΣΗΜΕΙΑ

Εκτός από την μέση τιμή, δύο άλλα χαρακτηριστικά θέσης μιας τυχαίας μεταβλητής είναι η διάμεσος και η επικρατούσα τιμή.

Ορισμός: Έστω X μια τυχαία μεταβλητή. Μια τιμή m της X λέγεται *διάμεσος (median)* της X αν έχει την ιδιότητα

$$P(X \leq m) \geq 1/2 \text{ και } P(X \geq m) \geq 1/2$$

Δηλαδή, η διάμεσος χωρίζει την κατανομή σε δύο ίσα μέρη. Ο καλύτερος τρόπος υπολογισμού της διαμέσου είναι με την χρήση της συνάρτησης κατανομής $F_X(\alpha)$. Για διακριτές τυχαίες μεταβλητές η μικρότερη τιμή α_i που δίνει $F_X \geq 1/2$ είναι πάντοτε η διάμεσος. Από τον ορισμό, $F_{X_i}(\alpha_i) \geq 1/2$ συνεπάγεται ότι $P(X \leq \alpha\ ) \geq 1/2$ και το γεγονός ότι α_i είναι η μικρότερη τιμή με την ιδιότητα αυτή συνεπάγεται ότι $F_{X_i}(\alpha_{i-1})<1/2$. Επομένως

$$P(X \geq \alpha_i) = 1-P(X \leq \alpha_{i-1}) = 1-F_X(\alpha_{i-1}) \geq 1/2$$

Παράδειγμα: Η διάμεσος της κατανομής του αθροίσματος δύο ζαριών είναι η τιμή 7 γιατί

$$P(X \leq 7) = P(X \geq 7) = (21/36) \geq 1/2.$$

Κάθε τυχαία μεταβλητή έχει μία ή περισσότερες διαμέσους. Στην περίπτωση των συνεχών τυχαίων μεταβλητών, η διάμεσος m είναι η λύση της εξίσωσης

$$\int_{-\infty}^{m} f(t)\,dt = 1/2$$

Ορισμός: *Επικρατούσα τιμή (mode)* μιάς τυχαίας μεταβλητής X λέγεται το σημείο εκείνο d που έχει την ιδιότητα:

1) $P(X=d) \geq P(X=x)$ $\quad \forall$ x αν X είναι διακριτή.
2) $f(d) \geq f(x)$ $\quad \forall$ x αν X είναι συνεχής.

Κάθε τυχαία μεταβλητή έχει μία ή περισσότερες επικρατούσες τιμές.

Ορισμός: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με συνάρτηση κατανομής F(x). Κάθε σημείο x που έχει την ιδιότητα

$$F(x_p-0) \leq p \leq F(x)$$

λέγεται *p-ποσοστιαίο σημείο (p-percentile)* της X ή της κατανομής της X.
Η σχέση αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$P(X \le x_p) = F(x_p) = p \quad \text{αν η X είναι συνεχής}$$

και με τις

$$P(X \le x_p) \ge p \text{ και } P(X \ge x_p) \ge 1-p \quad \text{αν η X είναι διακριτή.}$$

Προφανώς αν p=0.5 το x_p είναι η διάμεσος.

Το σημείο $x_{0.25}$ λέγεται και *πρώτο* ή *κάτω τεταρτημόριο*, ενώ το $x_{0.75}$ λέγεται και *τρίτο* ή *άνω τεταρτημόριο*. Η διαφορά $x_{0.75}$ - $x_{0.25}$ λέγεται *ενδοτεταρτημοριακό εύρος (interquartile range)* και χρησιμοποίειται σαν δείκτης συγκέντρωσης της κατανομής της X.

ΔΙΑΣΠΟΡΑ ΚΑΙ ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Η μέση τιμή μιας κατανομής δίνει ορισμένες πληροφορίες για την κατανομή. Οι πληροφορίες αυτές δεν είναι πάντα αρκετές. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε δύο τυχαίες μεταβλητές X και Y με κατανομές όπως αυτές που δίνονται στους παρακάτω πίνακες

X :	1	2	3	4
	1/8	2/8	3/8	2/8

Y :	-20	1	10	30
	2/8	2/8	3/8	1/8

παρατηρούμε ότι έχουν την ίδια μέση τιμή (2.75). Οι τιμές της X όμως είναι “κοντά” στην μέση τιμή ενώ αντίθετα οι τιμές της Y απέχουν αρκετά από αυτήν. Για τον λόγο αυτό χρειαζόμαστε και κάποιο άλλο μέτρο που να δίνει την “απόσταση” των τιμών της X από τη μέση της τιμή. Ως τέτοιο μέτρο ορίζουμε την διασπορά της X.

Ορισμός: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μ=E(X). Η ποσότητα

$$E\left[(X-\mu)^2\right]=\begin{cases}\sum (x-\mu)^2 P(X=x) & \text{αν X διακριτή}\\ \int_{-\infty}^{+\infty}(x-\mu)^2 f(x)dx & \text{αν X συνεχής}\end{cases}$$

αν υπάρχει λέγεται *διασπορά (ή διακύμανση) (variance)* της τυχαίας μεταβλητής X και συμβολίζεται με VarX ή V(X) ή Δ(X). Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς αυτούς εναλλακτικά.

Ορισμός: Η θετική τετραγωνική ρίζα της διασποράς ονομάζεται *τυπική απόκλιση (standard deviation)* της X και συμβολίζεται με σ_X η απλώς σ. Δηλαδή

$$\sigma = \sqrt{\Delta(X)}$$

Παράδειγμα: Για τις τυχαίες μεταβλητές X και Y που ορίσαμε παραπάνω βρίσκουμε εύκολα ότι

$\Delta(X) = 0.9375$, $\Delta(Y) = 242.69$ και επομένως

$\sigma_X = 0.9683$ και $\sigma_Y = 15.58$.

Τα πλεονεκτήματα της τυπικής απόκλισης έναντι της διασποράς είναι ότι εκφράζεται στις ίδιες μονάδες μέτρησης με την τυχαία μεταβλητή.

Ιδιότητες της Διασποράς

(Υποθέτουμε ότι θεωρούμε τυχαίες μεταβλητές των οποίων η διασπορά υπάρχει).

Πρόταση: $\Delta(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$.

Απόδειξη: $\Delta(X) = E(X^2 - 2X\mu + \mu^2) = E(X^2) - 2\mu^2 + \mu^2 = E(X^2) - \mu^2$.

Η παραπάνω πρόταση διευκολύνει τον υπολογισμό της διασποράς.

Πρόταση: Αν α και β είναι πραγματικές σταθερές, τότε

$$\Delta(\alpha X+\beta) = \alpha^2\Delta(X)$$

Απόδειξη: Εύκολη.

Πόρισμα: Αν α και β είναι πραγματικές σταθερές, τότε

$$\Delta(\alpha X) = \alpha^2\Delta(X) \text{ και } \Delta(X+\beta) = \Delta(X)$$

Ορισμός: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Η τυχαία μεταβλητή

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

λέγεται *τυποποιημένη (standardized)* μορφή της X.

Η ονομασία της οφείλεται στην ακόλουθη ιδιότητα

Πρόταση: $E(Z) = 0$, $\Delta(Z) = 1$.

Απόδειξη: Εύκολη.

Σημείωση: Αν λύσουμε ως προς X, βρίσκουμε ότι $X=\mu+\sigma Z$. Επομένως η τυποποιημένη τιμή μίας τυχαίας μεταβλητής καθορίζει πόσες τυπικές αποκλίσεις απέχει η τιμή αυτή της X από την μέση τιμή της. Οι τυποποιημένες τιμές χρησιμοποιούνται, συνήθως, για τη σύγκριση τιμών τυχαίων μεταβλητών με διαφορετικές κατανομές.

Θεώρημα: (Ανισότητα του Markov)
Έστω X μία τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο μη αρνητικές τιμές. Τότε

$$P(X\geq\alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Απόδειξη: (διακριτή περίπτωση)

$$P(X) = \sum_i X_i P(x_i) =$$

$$= \sum_{x_i<\alpha_i} x_i P(x_i) + \sum_{x_i>\alpha_i} x_i P(x_i) \geq \sum_{x>\alpha_i} x_i P(x_i) \geq \alpha \sum_{x_i>\alpha} P(x_i)$$

Επομένως

$$P(X\geq\alpha) \leq \frac{E(X)}{\alpha}$$

Η ανισότητα του Markov δίνει ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα με την οποία μία τυχαία μεταβλητή υπερβαίνει κάποια ποσότητα. Είναι δυνατό να κατασκευάσουμε και ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα με την οποία μία τυχαία μεταβλητή αποκλίνει από τη μέση τιμή της.

Θεώρημα: (Chebyshev). Έστω X μία τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή μ και διασπορά σ^2. Για κάθε κ>0

$$P\left(|X-\mu| \geq \kappa\sigma\right) \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

Απόδειξη: (Για X διακριτή)

Έχουμε ότι $(X-\mu)^2 \geq 0$ και επομένως, εφαρμόζοντας την ανισότητα του Markov για $\alpha=\kappa^2\sigma^2$ παίρνουμε

$$P\left((X-\mu)^2 \geq \kappa^2\sigma^2\right) \leq \frac{E\left\{(X-\mu)^2\right\}}{\kappa^2\sigma^2} = \frac{1}{\kappa^2}$$

αλλά $(X-\mu)^2 \geq \kappa^2\sigma^2 \Leftrightarrow |X-\mu| \geq \kappa\sigma$

επομένως

$$P\left(|X-\mu|) \geq \kappa\sigma\right) \leq \frac{1}{\kappa^2}$$

Η σημασία της ανισότητας του Chebyshev έγκειται στο γεγονός ότι δίνει ένα φράγμα για την πιθανότητα μιας τυχαίας μεταβλητής της οποίας η κατανομή είναι άγνωστη. (Την πιθανότητα με την οποία η απόσταση της X από την μέση της τιμή ξεπερνά κ φορές την τυπική απόκλιση).

Το φράγμα αυτό δεν είναι πάντα το καλύτερο που μπορεί να πετύχει κανείς. Πολλές φορές μάλιστα είναι πολύ συντηρητικό. Εάν φυσικά, ξέρουμε περισσότερα πράγματα για την κατανομή της X, πέρα από το μ και σ^2, τότε το φράγμα αυτό είναι δυνατό να βελτιωθεί.

Παρατήρηση: Πολλές φορές η ανισότητα του Chebyshev αναφέρεται με την εξής μορφή

$$P\left(|X-\mu| \geq \kappa\right) \leq \frac{\sigma^2}{\kappa^2}$$

Η μορφή αυτή είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη και προκύπτει από εκείνη αν αντικαταστήσουμε το κσ με κ.

Πόρισμα: Ισχύει

$$P\left(\left| X-\mu \right| < \kappa\sigma\right) \geq 1-\frac{1}{\kappa^2}$$

Απόδειξη: Προφανής.

Παρατήρηση: Από το προηγούμενο πόρισμα βλέπουμε ότι για κ=2 και για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή τουλάχιστον τα 3/4 των τιμών της βρίσκονται στο διάστημα [μ-2σ, μ+2σ]. Για κ=3 βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη πιθανότητα για το διάστημα με άκρα (μ ± 3σ) είναι 8/9.
Θα έχουμε την ευκαιρία αργότερα να δούμε πως βελτιώνεται το φράγμα αυτό όταν η κατανομή της X είναι γνωστή.

Παράδειγμα: Έστω ότι ο αριθμός των αντικειμένων που παράγει μία βιομηχανία στο διάστημα μιάς βδομάδας είναι τυχαία μεταβλητή με μ=500 και σ =100. Τί μπορούμε να πούμε για την πιθανότητα του ενδεχομένου ότι σε μία συγκεκριμένη βδομάδα η παραγωγή να κυμανθεί ανάμεσα σε 430 και 570 αντικείμενα;

Απάντηση:

$$P(430<X<570) = P(\,|X-500| < 70) = 1-\frac{1}{49} = \frac{48}{49}$$

Σημείωση: Όλα τα μέτρα θέσης και απόκλισης που μελετώνται στο κεφάλαιο αυτό αναφέρονται στην μελέτη πληθυσμών. Η εκτίμηση των μεγεθών αυτών γίνεται μέσω αντιστοίχων δειγματικών μέτρων. Τα δειγματικά αυτά μέτρα, όσον αφορά τις περιγραφικές τους ιδιότητες, μελετώνται κυρίως σε εγχειρίδια Περιγραφικής Στατιστικής (βλέπε π.χ. Ι. Πανάρετος & Ε. Ξεκαλάκη, *Εισαγωγή στην Στατιστική Σκέψη, τόμος Ι (Περιγραφική Στατιστική)*). Η Στατιστική Συμπερασματολογία που συνδέει τα δειγματικά μέτρα με τα αντίστοιχα μέτρα του πληθυσμού εξετάζονται στο δεύτερο μέρος του βιβλίου.

ΜΕΡΙΚΕΣ ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΕΣΕΣ ΤΙΜΕΣ

Ροπές

Η μέση τιμή και η διασπορά είναι δύο παραδείγματα μιας γενικότερης έννοιας των πιθανοτήτων, της έννοιας των ροπών.

Ορισμός: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή και r ένas θετικός αριθμός. Η ποσότητα

$$E(X^r)$$

(εφ' όσον υπάρχει), λέγεται *ροπή (moment)* **r** *τάξης περί το μηδέν* της τυχαίας μεταβλητής X ή *απλή ροπή r τάξης* της X και συμβολίζεται με μ'_r. Προφανώς

$$E\left(X^r\right)=\begin{cases}\sum_x x^r P\left(X=x\right) & \text{αν } X \text{ διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} x^r f\left(x\right)dx & \text{αν } X \text{ συνεχής.}\end{cases}$$

Η απλή ροπή τάξης r υπάρχει αν $\sum \left|x^r\right| P\left(X=x\right)<\infty$ ή αν $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|x^r\right| f\left(x\right)dx<\infty$, αντίστοιχα.

Παρατήρηση: $\mu'_1 = E(X) = \mu$ και $\mu'_2 = E(X^2)$.

Ορισμός: Έστω X μία τυχαία μεταβλητή και r ένας θετικός αριθμός. Η ποσότητα

$$X_n \xrightarrow{D} X$$

(εφ' όσον υπάρχει) *λέγεται ροπή r τάξης περί την μέση τιμή* ή *κεντρική ροπή (central moment) r τάξης* και συμβολίζεται με μ_r.

Σημείωση: *Ο συμβολισμός* $X_n \underset{n\to+\infty}{\overset{D}{\to}} X$ *δηλώνει ότι η ακολουθία των μεταβλητών* $X_1, X_2, \ldots$ *συγκλίνει κατά νόμο ή κατά κατανομή (in distribution) στην μεταβλητή* X. *Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία των συναρτήσεων κατανομών* $P(X_n \le x)$ *συγκλίνει στην συνάρτηση κατανομής* $P(X \le x)$, *δηλαδή,*

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n \le x) = P(X \le x)$$

για όλα τα σημεία x στα οποία η $P(X \le x)$ *είναι συνεχής.*

Έχουμε ότι

$$\mu_r = E\left[(X-\mu)^r\right] = \begin{cases} \sum_x (x-\mu)^r P(X=x) & \text{αν } X \text{ είναι διακριτή} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^r f(x)dx & \text{αν } X \text{ είναι συνεχής} \end{cases}$$

με την προϋπόθεση ότι

$$\Sigma|(x\text{-}\mu)^r|P(X=x) < \infty \text{ και } \int_{-\infty}^{+\infty} \left|(x-\mu)^r\right| f(x)dx < \infty, \text{ αντίστοιχα}$$

Παρατήρηση: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \Delta(X)$.

Οι ροπές περί την μέση τιμή έχουν ιδιαίτερη σημασία γιατί δίνουν κάποια ιδέα για το πως μια τυχαία μεταβλητή κατανέμεται γύρω από την μέση τιμή της. Έχουμε ήδη δει την σημασία της διασποράς ως προς το σημείο αυτό. Η ροπή 3ης τάξης περί την μέση τιμή (πιο συγκεκριμένα η ποσότητα μ_3/σ^3) χρησιμοποιείται σαν *μέτρο λοξότητας* ή *ασυμμετρίας (skewness)* της κατανομής. Αν η κατανομή είναι συμμετρική περί την μέση τιμή τότε $\mu_3=0$. Είναι επομένως η μικρότερη κεντρική ροπή που δίνει ένδειξη για διαφορές στην μορφή της κατανομής από τη μια πλευρά της κατανομής (αναφορικά με τη μέση τιμή) στην άλλη. Επίσης η ροπή 4ης τάξης περί την μέση τιμή (πιο συγκεκριμένα η ποσότητα μ_4/σ^4) λέγεται και *συντελεστής* ή *μέτρο κύρτωσης (kurtosis)* γιατί μετρά πόσο αιχμηρή είναι η κατανομή.

Μπορεί να αποδειχθεί εύκολα ότι οι ροπές r τάξης περί την μέση τιμή και οι ροπές r τάξης περί το μηδέν συνδέονται με τις εξής σχέσεις:

$\mu_2 = \mu'_2 - \mu'^2_1$

$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_2\mu_1 + 2\,\mu'^2_1$

$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_3\mu'_1 + 6\mu'_2\mu'_1 - 3\,\mu'^4_1$

και γενικά

$$\mu_r = \mu'_r - \binom{r}{1}\mu'_{r-1}\mu'_1 + \binom{r}{2}\mu'_{r-2}\mu'^2_1 - \ldots + (-1)^r\binom{r}{r}\mu'^r_1$$