Θεωρία μέτρου και πιθανότητων, ΠΜΣ Ειδίκευσης στην Στατιστική, Διάλεξη 1

Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σύνολα, πράξεις συνόλων και ακολουθίες συνόλων

Πράξεις συνόλων

Οι βασικές πράξεις μεταξύ των συνόλων είναι η ένωση και η τομή.

Ορισμός 0.1 *Έστω A_i, $i = 1, 2, \cdots$ μια ακολουθία συνόλων.*

$$\begin{aligned} \cup_i A_i &= \{\text{το σύνολο των στοιχείων που ανήκει σε κάποιο από τα } A_i,\ i = 1, 2, \cdots\} \\ \cap_i A_i &= \{\text{το σύνολο των στοιχείων που ανήκει σε κάθε } A_i,\ i = 1, 2, \cdots\} \end{aligned}$$

Σημαντική είναι και η πράξη του συμπληρώματος, αν $A \subset E$ τότε $A^c = E \setminus A$ (όλα τα στοιχεία του E που δεν περιέχονται στο A.

Η διαφορά του A απο το B συμβολίζεται με $A \setminus B$ και το σύνολο αυτό περιέχει όλα τα στοιχεία του A που δεν ανήκουν στο B. Συνεπώς

$$c \in A \setminus B \iff c \in A \textbf{ αλλά } c \notin B$$

Είναι προφανές ότι $A \setminus B = A \cap B^c$.

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να ορίσουμε και την συμμετρική διαφορά δύο συνόλων A και B,

$$A \triangle B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

Η συμμετρική διαφορά περιέχει τα στοιχεία τα οποία ανήκουν σε ένα απο τα A και B αλλά όχι και στα δύο.

Οι ακόλουθοι κανόνες, γνωστοί και ως νόμοι του De Morgan , συνδέουν την ένωση, την τομή και την συμπλήρωση, και είναι πολύ χρήσιμοι,

$$(\cup_{i=1}^n A_i)^c = \cap_{i=1}^n A_i^c$$
$$(\cap_{i=1}^n A_i)^c = \cup_{i=1}^n A_i^c$$

Οι νόμοι του De Morgan μπορεί να γενικευθούν και για άπειρες ενώσεις και τομές ($n = \infty$).

Μία τελευταία ιδιότητα της τομής και της ένωσης είναι η ακόλουθη,

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Ακολουθίες συνόλων

Ορισμός 0.2 *(i) Το **κάτω όριο** της ακολουθίας συνόλων $\{A_i\}$ είναι το σύνολο*

$$\lim_{i\to\infty} \inf A_i = \cup_{n=1}^{\infty} [\cap_{k=n}^{\infty} A_k]$$

*(ii) Το **άνω όριο** της ακολουθίας συνόλων $\{A_i\}$ είναι το σύνολο*

$$\lim_{i\to\infty} \sup A_i = \cap_{n=1}^{\infty} [\cup_{k=n}^{\infty} A_k]$$

(iii) Αν $\lim_{i\to\infty} \sup A_i = \lim_{i\to\infty} \inf A_i = B$ θα λέμε ότι $\lim_{i\to\infty} = B$.

Είναι σημαντική η ερμηνεία του άνω και του κάτω ορίου μιας ακολουθίας συνόλων

$$\begin{aligned} &\lim_{i\to\infty} \inf A_i = \{x \in X\ :\ x \in A_i \text{ για όλα παρά πεπερασμένα το πλήθος } i \in \mathbb{N}\} \\ &\lim_{i\to\infty} \sup A_i = \{x \in X\ :\ x \in A_i \text{ για άπειρα το πλήθος } i \in \mathbb{N}\} \\ &\lim_{i\to\infty} \inf A_i \subseteq \lim_{i\to\infty} \sup A_i \end{aligned}$$

Ορισμός 0.3 *Μια ακολουθία συνόλων ονομάζεται μονότονη αν ισχύει είτε $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots$ (αύξουσα) είτε $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots$ (φθίνουσα).*

Πρόταση 0.1 *Αν A_i αύξουσα ακολουθία συνόλων ισχύει ότι υπάρχει το όριο*

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcup_i A_i = \{x \in X\ : x \in A_i \text{ για κάποιο } i \in \mathbb{N}\}$$

Αν A_i φθίνουσα ακολουθία συνόλων τότε υπαρχει το όριο

$$\lim_{i\to\infty} A_i = \bigcap_i A_i = \{x \in X\ : x \in A_i \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}\}$$

Ανοικτά και κλειστά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου και συνέχεις συναρτήσεις

Κλειστά και ανοιχτά υποσύνολα ενός μετρικού χώρου

Ορισμός 0.4 *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και x_n μία ακολουθία στοιχείων στον M. Λέμε ότι η ακολουθία $x^{(n)}$ συγκλίνει στο x όπου $x \in M$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει κάποιο $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ να ισχύει $d(x^{(n)}, x) < \epsilon$.*

Ορισμός 0.5 *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και $X \subset M$.*
*Ένα σημείο του $x \in M$ είναι ένα **οριακό σημείο** (σημείο συσσώρευσης) του X αν υπάρχει μία ακολουθία $x^{(n)} \in X$ τέτοια ώστε $x^{(n)} \to x$ (με την σύγκλιση στον M).*
*Ένα υποσύνολο $X \subset M$ είναι **κλειστό** στο M αν κάθε οριακό σημείο (σημείο συσσώρευσης) του X ανήκει στο X.*

Πρόταση 0.2 *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $X_i \subset M$, $i = 1, \cdots, m$, υποσύνολα του M τα οποία είναι κλειστά στον M. Τότε,*

1. *$\cup_{i=1}^{m} X_i$ είναι κλειστό στο M (δεν είναι απαραίτητο ότι μπορούμε πάντα να πάρουμε $m = \infty$)*
2. *$\cap_{i=1}^{m} X_i$ είναι κλειστό στο M (μπορούμε πάντα να πάρουμε $m = \infty$)*

Για την έννοια του ανοιχτού συνόλου θα χρειαστεί να ορίσουμε πρώτα την έννοια της ανοιχτής μπάλας σε κάποιον μετρικό χώρο.

Ορισμός 0.6 *Έστω (M, d) κάποιος μετρικός χώρος και $x \in M$. Το υποσύνολο $B_\epsilon(x) = \{y \in M \mid d(y, x) < \epsilon\}$ ονομάζεται* **ανοιχτή μπάλα** *του M με κέντρο x και ακτίνα ϵ.*

Ορισμός 0.7 *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και $X \subset M$. Θα λέμε ότι το X είναι ανοιχτό στο M αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει μία ανοιχτή μπάλα $B_\epsilon(x)$ τέτοια ώστε $B_\epsilon(x) \subset X$.*

Πρόταση 0.3 *Έστω M ένας μετρικός χώρος και $X_i \subset M$, $i = 1, \cdots, m$, υποσύνολα του M τα οποία είναι ανοιχτά στον M. Τότε,*

1. *$\cup_{i=1}^{m} X_i$ είναι ανοιχτό στο M (ισχύει πάντοτε και για $m = \infty$)*
2. *$\cap_{i=1}^{m} X_i$ είναι ανοιχτό στο M (δεν ισχύει απαραίτητα και για $m = \infty$)*

Πρόταση 0.4 *Έστω (M, d) ένας μετρικός χώρος και $X \subset M$. Το X είναι ανοιχτό αν και μόνο αν το $X' = M \setminus X$ είναι κλειστό.*

Ανοιχτά και κλειστά σύνολα και συνέχεια

Ορισμός 0.8 *Έστω (M_1, d_1) και (M_2, d_2) δυο μετρικοί χώροι και $f : M_1 \to M_2$ μία συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_1 \in M_1$ αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $d_1(x, x_1) < \delta$ να ισχύει $d_2(f(x), f(x_1)) < \epsilon$.*

Πρόταση 0.5 *Μία συνάρτηση $f : M_1 \to M_2$ είναι συνεχής αν και μονο αν για κάθε ακολουθία $x^{(n)} \in M_1$ για την $x^{(n)} \to x$ στον M_1, ισχύει ότι η ακολουθία $f(x^{(n)}) \to f(x)$ στον M_2.*

Οι συνεχείς συναρτήσεις έχουν χρήσιμες ιδιότητες ως προς τα κλειστά και τα ανοίχτά σύνολα.

Πρόταση 0.6 *Έστω $f : M_1 \to M_2$ μία συνάρτηση. Η f είναι συνεχής στο M_1 αν και μόνο αν η f^{-1} απεικονίζει κλειστά υποσύνολα του M_2 σε κλειστά υποσύνολα του M_1.*

Πρόταση 0.7 *Έστω $f : M_1 \to M_2$ μία συνάρτηση. Η f είναι συνεχής στο M_1 αν και μόνο αν η f^{-1} απεικονίζει ανοιχτά υποσύνολα του M_2 σε ανοιχτά υποσύνολα του M_1.*

Άλγεβρες και σ-άλγεβρες

Θα εισάγουμε τώρα ορισμένες δομές συνόλων οι οποίες είναι πολύ χρήσιμες στην θεωρία μέτρου.

Ορισμός 0.9 *Έστω $\mathcal{F}$ μία συλλογή υποσυνόλων του X που ικανοποιεί τις ιδιότητες*

1. *$\emptyset \in \mathcal{F}$ και $X \in \mathcal{F}$,*
2. *Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε και $A^c \in \mathcal{F}$,*
3. *Αν $A_i \in \mathcal{F}$, $i \in \mathbb{N}$ τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.*

*Η $\mathcal{F}$ ονομάζεται $\sigma-$***άλγεβρα***.*

Πρόταση 0.8 *Έστω $\mathcal{C}$ μια οποιαδήποτε συλλογή υποσυνόλων του X. Υπάρχει η μικρότερη σ-άλγεβρα $\mathcal{C}_0$ υποσυνόλων του X που περιέχει την $\mathcal{C}$. Την $\mathcal{C}_0$ θα την συμβολίζουμε $\mathcal{C}_0 := \sigma(\mathcal{C})$*

Ας υποθέσουμε ότι $f : X \to Y$, μια συνάρτηση μεταξύ δύο συνόλων X, Y (μετρικών χώρων). Αν $E \subset Y$ ορίζουμε $f^{-1}(E) := \{x \in X : f(x) \in E\}$.

Ισχύει ότι

$$f^{-1}(E^c) = f^{-1}(Y \setminus E) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(E) = X \setminus f^{-1}(E) = (f^{-1}(E))^c$$
$$f^{-1}(\bigcup_i A_i) = \bigcup_i f^{-1}(A_i)$$
$$f^{-1}(\bigcap_i A_i) = \bigcap_i f^{-1}(A_i)$$

Οι παραπάνω ιδιότητες μας δείχνουν ότι αν $f : X \to Y$ και $\mathcal{F}$ είναι μια σ-άλγεβρα του X τότε η συλλογή συνόλων $f^{-1}(\mathcal{F}) := \{f^{-1}(E) : E \in \mathcal{F}\}$ είναι επίσης μια σ-άλγεβρα του U.

Άλγεβρες Borel

Ορισμός 0.10 *Ας θεωρήσουμε ένα σύνολο Q. Η σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ που περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του X ονομάζεται άλγεβρα Borel στο X.*

Στην ειδική περίπτωση όπου $X = \mathbb{R}$ η άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται απο όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}$.

Μέτρο

Ορισμός 0.11 *Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ ονομάζεται μέτρο αν ικανοποιεί τις ιδιοτητες*

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. *Αν $A_i \in \mathcal{F}$, ξένα μεταξύ τους τότε $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$*

Μπορεί να αποδειχθεί ότι υπάρχει μια απεικόνιση με τις ιδιότητες αυτές. Η ύπαρξη και κατασκευή του μέτρου είναι πολύ ενδιαφέρουσα απο την μαθηματική άποψη και θα ασχοληθούμε με αυτή αργότερα. Στην φάση αυτή θα θεωρήσουμε την ύπαρξη του μέτρου και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες του.

Πρόταση 0.9 *Βασικές ιδιότητες του μέτρου είναι οι ακόλουθες*

1. *Αν $A_1 \subset A_2$ τότε $\mu(A_1) \leq \mu(A_2)$ (μονοτονία)*
2. *Για οποιαδήποτε $A_i \in \mathcal{F}$ (όχι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους) ισχύει $\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i)$ (υποαθροιστικότητα)*

Παραδείγματα μέτρων.

Παράδειγμα 0.1 *X ένα διακριτό ενδεχομένως άπειρο σύνολο, $X = \{\omega_1, \omega_2, \cdots\}$ και $\{p_i\}$ μια αθροίσιμη θετική ακολουθία, τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. Αν $\mathcal{F}$ είναι η σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα υποσύνολα του X τότε αν ορίσουμε την απεικόνιση $\mu : \mathcal{X} \to [0,1]$ ως εξής: Για κάθε $A \in \mathcal{F}$, $\mu(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$ μπορεί να δείξει κανείς ότι η μ είναι ένα μέτρο. Στην περίπτωση που το X είναι πεπερασμένο σύνολο και $p_i = 1/card(X)$ παίρνουμε το μέτρο αρίθμησης.*

Παράδειγμα 0.2 *Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έστω ένα μέτρο $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$ τέτοιο ώστε $\mu((a,b)) = \mu((a,b]) = \mu([a,b)) = \mu([a,b]) = b - a$. Το μέτρο αυτό ονομάζεται μέτρο Lebesgue .*

Παράδειγμα 0.3 *Έστω $X = \mathbb{R}$ και $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Έστω επίσης μια πραγματική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = 1$. Η απεικονιση $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ που ορίζεται απο την σχέση $\mu(A) = \int_A f(x)\,dx$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας.*

Σύγκλιση ακολουθιών συνόλων και μέτρο

Πρόταση 0.10 *1. Έστω A_i μια αύξουσα ακολουθία συνόλων. Τότε $\mu(\lim_i A_i) = \lim_i(\mu(A_i))$.*
2. Έστω A_i μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων. Τότε $\mu(\lim_i A_i) = \lim_i(\mu(A_i))$, αρκεί να υπάρχει ένα σύνολο $A \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\mu(A) < \infty$ και $A_1 \subset A$.

Ας θεωρήσουμε τώρα ακολουθίες συνόλων οι οποίες δεν είναι απαραίτητα μονότονες.

Πρόταση 0.11 *1. Λήμμα του Fatou για ακολουθίες συνόλων,*

$$\mu(\lim_{i\to\infty} \inf A_i) \leq \lim_{i\to\infty} \inf \mu(A_i)$$

2. Ανάστροφο λήμμα του Fatou για ακολουθίες συνόλων,

$$\mu(\lim_{i\to\infty} \sup A_i) \geq \lim_{i\to\infty} \sup \mu(A_i)$$

αρκεί όλα τα A_i να περιέχονται σε ένα σύνολο A πεπερασμένου μέτρου ($A_i \subset A,\ \mu(A) < \infty$).

Με εφαρμογή του λήμματος του Fatou μπορεί να δείξει κανείς ότι αν υπάρχουν τα όρια της ακολουθίας συνόλων και της ακολουθίας των μέτρων αντιστοίχως τότε ισχύει εν γένει ότι $\mu(\lim_i A_i) \leq \lim_i \mu(A_i)$. Αν η ακολουθία συνόλων είναι φραγμένη απο ένα σύνολο πεπερασμένου μέτρου τότε ισχύει η ισότητα. Στην περίπτωση αυτή αν υπάρχει το $\lim_i A_i$ τότε υπάρχει και το $\lim_i \mu(A_i)$.

Μέτρο Lebesgue

Το μέτρο Lebesgue είναι ένα μέτρο στο $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ για το οποίο ισχύει ότι $\mu([a,b]) = b - a$ και το ίδιο για όλα τα διαστήματα (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$.

Κατασκευή του μέτρου Lebesgue

Δεν θα επεκταθούμε στην κατασκευή του μέτρου Lebesgue αλλά θα αναφέρουμε σύντομα ότι βασίζεται στο εξωτερικο μέτρο Lebesgue .

Ορισμός 0.12 *Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}$, ορίζεται ως*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(I_n) \ \mid\ A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$$

όπου I_n διαστήματα.

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue έχει ιδιότητες που μοιάζουν με το μέτρο αλλά δεν ικανοποιεί την αθροιστικότητα.

Πρόταση 0.12 *Για το εξωτερικό μέτρο Lebesgue μ^* ισχύουν τα ακόλουθα:*

1. *Αν A μηδενοσύνολο τότε $\mu^*(A) = 0$ και αντίστροφα.*
2. *Αν $A \subset B$ τότε $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, δηλαδή η απεικόνιση μ^* είναι μονότονη.*
3. *Αν I ένα διάστημα του $\mathbb{R}$, τότε $\mu^*(I) = \ell(I)$.*

4. Αν E_n μία ακολουθία υποσυνόλων του $\mathbb{R}$, $E_n \subset \mathbb{R}$, τότε

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$$

Απο το εξωτερικό μέτρο Lebesgue μπορούμε να παράγουμε το μέτρο Lebesgue περιοριζόμενοι σε ένα κατάλληλο υποσύνολο υποσυνόλων.

Ορισμός 0.13 *Ένα υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}$ ονομάζεται* **μετρήσιμο** *ως προς το εξωτερικό μέτρο Lebesgue αν για κάθε $A \subset \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$$

Το σύνολο A ονομάζεται **σύνολο δοκιμής**. *Το σύνολο των μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ συμβολίζεται $\mathcal{M}$.*

Πρόταση 0.13 *Αν $E_i \in \mathcal{M}$, E_i ξένα μεταξύ τους, τότε*

$$\mu^*\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(E_i).$$

Αν λοιπόν περιορίσουμε το εξωτερικό μέτρο Lebesgue στο $\mathcal{M}$, παίρνουμε το μέτρο Lebesgue.
Η κατασκευή αυτή μπορεί να γενικευθεί και (σχεδόν) σε οποιοδήποτε μετρικό χώρο!

Πρόταση 0.14 *Ισχύει ότι $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}$.*

Με βάση το παραπάνω, μπορούμε να ορίσουμε το μέτρο Lebesgue ως $\mu_L : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+$.
Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που **δεν είναι μετρήσιμα**! Επίσης υπάρχουν υποσύνολα του $\mathbb{R}$ που **δεν είναι Borel** !

Ιδιότητες του μέτρου Lebesgue

Πρόταση 0.15 *(α) Το μέτρο Lebesgue είναι αμετάβλητο ως προς τις μεταφορές, δηλαδή αν $E \subset \mathbb{R}$ και $E + \lambda = \{x + \lambda \, : \, \forall x \in E\}$ τότε $\mu_L(E) = \mu_L(E + \lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.*
(β) Το μέτρο Lebesgue έχει την ιδιότητα της θετικής ομοιογένειας δηλαδή αν $E \subset \mathbb{R}$ και $\lambda E = \{\lambda x \, : \, \forall x \in E\}$ τότε $\mu_L(\lambda E) = \lambda \mu(E)$, για $\lambda > 0$.

Πρόταση 0.16 *Τα αριθμήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}$ είναι μηδενοσύνολα του μέτρου Lebesgue (δηλαδή τα $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ για τα οποία $\mu_L(E) = 0$).*

Πρόταση 0.17 *Αν E μηδενοσύνολο για το μέτρο Lebesgue τότε το $E^c = \mathbb{R} \setminus E$ είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.*

Το εξωτερικό μέτρο Lebesgue έχει τις εξής ιδιότητες ως προς την προσέγγιση

Πρόταση 0.18 *(ι) $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies \forall \epsilon > 0, \exists$ανοιχτό σύνολο $\mathcal{O} \supset E$, με $\mu^*(\mathcal{O} \setminus E) \leq \epsilon$*
(ιι) $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \implies \forall \epsilon > 0, \exists$κλειστό σύνολο $\mathcal{C} \supset E$, με $\mu^*(\mathcal{C} \setminus E) \leq \epsilon$

Πρόταση 0.19 *Έστω $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ με $\mu_L(E) > 0$. Τότε υπάρχει ένα πεπερασμένο ανοιχτό διάστημα I που το μήκος του προσεγγίζει το μέτρο $\mu_L(E)$ όσο καλά θέλουμε, δηλαδή $\forall \alpha \in (0,1)$ υπάρχει ανοιχτό διάστημα I τέτοιο ώστε $\alpha \mu_L(I) \leq \mu_L(E \cap I) \leq \mu_L(I)$.*

Γενικότερα μέτρα στο $\mathbb{R}$

Πρόταση 0.20 *Έστω $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ μία συνάρτηση με τις ιδιότητες (α)μη φθίνουσα, (β) δεξιά συνεχής και (γ) $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. Τότε η απεικόνιση $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ για την οποία ισχύει $\mu((-\infty, x]) = F(x)$ είναι ένα μέτρο πιθανοτητας.*

Θεώρημα επέκτασης και θεώρημα μονότονης κλάσης

Γενικά είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε μια σ-άλγεβρα και ένα μέτρο σε αυτή. Εν γένει λοιπον κατασκευάζουμε μια απεικονιση που έχει τις ιδιότητες που περιμένουμε απο το μέτρο σε ένα ευκολότερο σύνολο υποσυνόλων του X και μετά το επεκτείνουμε στην μικρότερη σ-άλγεβρα που το περιέχει.

Θεώρημα 0.1 *Κάθε μέτρο το οποίο ορίζεται σε μια άλγεβρα $\mathcal{F}_0$ έχει μοναδική επέκταση στην μικρότερη σ-άλγεβρα που περιέχει την $\mathcal{F}_0$*

Θεώρημα 0.2 *Έστω $\mathcal{C}$ μια κλάση υποσυνόλων του X η οποία είναι κλειστή κάτω απο πεπερασμένες τομές και που περιέχει το X. Έστω επίσης $\mathcal{B}$ η μικρότερη κλάση που περιέχει το $\mathcal{C}$ και που είναι κλειστή κάτω απο τα αύξοντα όρια (δηλαδή αν $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \in \mathcal{C}$ τότε και $\cup_i A_i \in \mathcal{C}$) και τις διαφορές (δηλαδή αν $A_1, A_2 \in \mathcal{C}$ με $A_1 \subset A_2$ τότε $A_2 \setminus A_1 \in \mathcal{C}$). Τότε, $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{C})$.*

Πρόταση 0.21 *Έστω δύο μέτρα $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ τα οποία ταυτίζονται σε μια κλάση $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ η οποία είναι κλειστή κάτω απο τις πεπερασμένες τομές. Αν $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{F}$ τότε $\mu_1 = \mu_2$.*

Θεωρία μέτρου και πιθανότητων, ΠΜΣ Ειδίκευσης στην Στατιστική, Διάλεξη 2
Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σε ότι ακολουθήσει θα θεωρούμε $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ ένα χώρο με μέτρο. Η περίπτωση όπου $X = \Omega$, ένα σύνολο ενδεχόμενων και $\mu = P$ ένα μέτρο πιθανότητας είναι ειδική περίπτωση.

Μετρήσιμες συναρτήσεις

Ορισμός 0.1 *Η συνάρτηση $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}$, αν $f^{-1}(G) \in \mathcal{F}$ για κάθε ανοικτό $G \subset \mathbb{R}$.*

Θα μπορούσαμε ισοδύναμα να γράψουμε στον ορισμο 0.1, για κάθε $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Πρόταση 0.1 *Οι συνεχείς συναρτήσεις είναι και μετρήσιμες ως προς την $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.*

Πρόταση 0.2 *Έστω f, g μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$. Τότε και οι συναρτήσεις λf, $f + g$, $f g$, $max(f, g)$, $min(f, g)$ είναι επίσης μετρήσιμες.*

Ορισμός 0.2 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ένας χώρος πιθανοτήτων και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}$. Τότε η X ονομάζεται* **τυχαία μεταβλητή**.

Ορια συναρτήσεων και μετρησιμοτητα

Η μετρησιμότητα είναι μια ιδιότητα η οποία διατηρείται στο όριο!

Ορισμός 0.3 *Έστω $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Μπορούμε να ορίσουμε ως*

$$\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\geq 1} \left(\sup_{m\geq n} f_m \right), \quad \liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\geq 1} \left(\inf_{m\geq n} f_m \right)$$

Αν οι δύο παραπάνω συναρτήσεις συμπίπτουν τοτε λέμε ότι υπάρχει το όριο της ακολουθίας συναρτήσεων

$$\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n \tag{1}$$

Ένας ισοδύναμος ορισμός είναι ο

Ορισμός 0.4 *Έστω $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μια ακολουθία συναρτήσεων. Θα λέμε ότι $f_n \to f$ αν για κάθε $x \in \mathbb{X}$, $f_n(x) \to f(x)$ (με την έννοια της σύγκλισης στο $\mathbb{R}$). Δηλαδή, για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $\mid f_n(x) - f(x) \mid < \epsilon$, για $n > N$. Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{X}$ αλλά το N μπορει να εξαρτάται απο το x.*

Όμοια και για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών.
Η μετρησιμότητα διατηρείται στο όριο.

Πρόταση 0.3
1. *Έστω $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία συναρτήσεων η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Τότε $\limsup_n f_n$ και $\liminf_n f_n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις ως προς την $\mathcal{F}$. Όμοια και το $\lim_n f_n$ αν υπάρχει.*
2. *Έστω $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$. Τότε $\limsup_n X_n$ και $\liminf_n X_n$ είναι μετρήσιμες τυχαίες μεταβλητές ως προς την $\mathcal{F}$. Όμοια και το $\lim_n X_n$ αν υπάρχει.*

Σχεδόν παντού – σχεδόν βέβαια

Για την μελέτη της σύγκλισης ακολουθίων συναρτήσεων ή τυχαίων μεταβλητών δεν είναι πάντοτε απαραίτητο να θεωρήσουμε ότι τα $\limsup_n f_n$, $\liminf_n f_n$ ή $\limsup_n X_n$, $\liminf_n X_n$ αντίστοιχα, ορίζονται σημειακά δηλαδή για κάθε $x \in \mathbb{X}$ ή κάθε $\omega \in \Omega$. Μπορούμε να 'αφαιρέσουμε' απο τον σημειακό ορισμό κάποια x ή ω αρκεί να ισχύει το ότι αν G είναι το σύνολο των x ή των ω που δεν λαμβάνουμε υπόψιν, τότε $\mu(G) = 0$.

Ορισμός 0.5 *Θα λέμε ότι η ιδιότητα C ισχύει σχεδόν παντού ως προς το μ αν* $\mu(\{x \in \mathbb{X}, \mid C \text{ δεν ισχύει}\}) = 0$

Απλές συναρτήσεις ή τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 0.6 *Η συνάρτηση $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **απλή συνάρτηση** *αν μπορεί να γραφεί ως $f(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{1}_{A_i}(x)$ για πεπερασμένο το πλήθος n, $c_i \in \mathbb{R}$ και $A_i \subset \mathbb{X}$ όπου $A_i \in \mathcal{F}$.*

Η μικρότερη όμως σ-άλγεβρα η οποία κάνει μετρήσιμη την απλή συνάρτηση (;;) είναι η $\sigma(A_1, \cdots, A_n)$ δηλαδή η σ-άλγεβρα η οποία παράγεται απο τα σύνολα $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$.

Το ολοκλήρωμα Lebesgue

Για να ορίσουμε το ολοκλήρωμα Lebesgue θα ξεκινήσουμε απο τον ορισμό του για τις απλές συναρτήσεις.

Ορισμός 0.7 *Έστω $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μια απλή συνάρτηση. Ορίζουμε $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu := \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$. Η ποσότητα $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu$ ονομάζεται το* **ολοκλήρωμα** *της f επάνω στο $\mathbb{X}$ ως προς το μέτρο μ.*

Στην περίπτωση των τυχαίων μεταβλητών το ολοκλήρωμα αντιστοιχεί στην μέση τιμή και συμβολίζεται και ως $\mathbb{E}_{\mu}[X]$.

Πρόταση 0.4 *Το ολοκλήρωμα μιας απλης συνάρτησης ή μιας απλής τυχαίας μεταβλητής είναι ανεξάρτητο της αναπαράστασης της, δηλαδή αν $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mathbf{1}_{A_i} = \sum_{i=1}^{m} d_i \, \mathbf{1}_{B_i}$ τότε $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{m} d_i \, \mu(B_i)$*

Πολλές φορές επίσης μπορεί να χρειαστεί να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μιας απλης συνάρτησης f (τυχαίας μεταβλητής X) σε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{X}$ (ή Ω αντίστοιχα). Αυτό γίνεται ως εξής $\int_A f \, d\mu = \int_{\mathbb{X}} f \, \mathbf{1}_A \, d\mu$

Οι παρακάτω ιδιοτητες του ολοκληρώματος (μέσης τιμής) για απλές συναρτήσεις (τυχαίες μεταβλητές) είναι πολύ σημαντικές

Πρόταση 0.5 *Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και f, g απλές συναρτήσεις, $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$.*

1. *Γραμμικότητα: αν f, g απλές συναρτήσεις και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τότε $\int_{\mathbb{X}} (\lambda_1 \, f + \lambda_2 \, g) \, d\mu = \lambda_1 \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu + \lambda_2 \int_{\mathbb{X}} g \, d\mu$*
2. *Θετικότητα: αν f, g απλές συναρτήσεις (τυχαίες μεταβλητές) τέτοιες ώστε $f \geq g$ τότε ισχύει $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu \geq \int_{\mathbb{X}} g \, d\mu$*

Ας ονομάσουμε $\mathbb{F} = \{$το σύνολο όλων των απλών συναρτήσεων απο το$\mathbb{X} \to \mathbb{R}\}$, μπορούμε να θεωρήσουμε το ολοκλήρωμα σαν την απεικόνιση $I : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως $I(f) = \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \mu(A_i)$ για κάθε $f \in \mathbb{F}$. Η πρόταση 0.5 μας λέει οτι η απεικόνιση I είναι γραμμικός και θετικός τελεστής. Όμοια και για τις τυχαίες μεταβλητές.

Το ολοκλήρωμα για θετικές συναρτήσεις ή τυχαίες μεταβλητές

Θα δώσουμε δύο διαφορετικούς αλλά ισοδύναμους ορισμούς.

Ορισμός 0.8 *(Ι) Ας θεωρήσουμε το σύνολο $\mathbb{F}_f$ όλων των απλών συναρτήσεων g για τις οποίες ισχύει $0 \leq g \leq f$, υπό την έννοια ότι σχεδόν παντού $0 \leq g(x) \leq f(x)$. Ας ορισουμε σαν I_f το σύνολο των ολοκληρωμάτων αυτών των g επάνω στο μέτρο μ. Συνεπώς,*

$$\mathbb{F}_f = \{g \in \mathbb{F} \;\; | \;\; 0 \leq g \leq f\} \subset \mathbb{F}, \quad I_f = \{\int_{\mathbb{X}} g \, d\mu \;\; | \;\; g \in \mathbb{F}_f\} \subset \mathbb{R}$$

Ορίζουμε σαν το ολοκλήρωμα της f επάνω στο μέτρο μ το $\sup$ του συνόλου I_f, δηλαδή $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu := \sup I_f$

Ορισμός 0.9 *(ΙΙ) Ας θεωρησουμε $\{f_n\}$ μία ακολουθία απλών συναρτήσεων που συγκλινει μονότονα στην f, $f_n \uparrow f$. Παίρνουμε και την ακολουθία πραγματικών αριθμών $r_n := \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu$ η οποία είναι καλά ορισμένη. Σαν ολοκλήρωμα της f επάνω στο μέτρο μ ορίζουμε το όριο της ακολουθίας r_n, δηλαδή $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu := \lim_{n \to \infty} \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu$ όπου επιτρέπουμε την προοπτική να είναι το όριο αυτο άπειρο.*

Παράδειγμα 0.1 *Έστω $\mathbb{X} = [a, b]$ και f μία συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να προσεγγιστεί απο την ακολουθία απλών συναρτήσεων*

$$f_n(x) = \begin{cases} k \, 2^{-n} & k \, 2^{-n} \leq f(x) < (k+1) \, 2^{-n} \quad 0 \leq k \leq n \, 2^n - 1 \\ n & f(x) \geq n \end{cases}$$

υπό την έννοια ότι $f_n \uparrow f$.

Όμοια για τυχαίες μεταβλητές.

Το ολοκλήρωμα για μια οποιαδήποτε συνάρτηση ή τυχαία μεταβλητή

Έστω τώρα $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μία συνάρτηση όχι απαραίτητα θετική. Μπορούμε να ορίσουμε τις συναρτήσεις f^+, f^- με βάση τους τύπους

$$(f^+)(x) = (f(x))^+ = max(f(x), 0) = f(x) \vee 0, \quad (f^-)(x) = (f(x))^- = max(-f(x), 0) = (-f(x)) \vee 0, \;\; \forall \, x \in \mathbb{X}.$$

Οι συναρτήσεις f^+, f^- ονομάζονται το θετικό και το αρνητικό μέρος, αντίστοιχα, της f. Οι συναρτήσεις f^+, f^- είναι θετικές συναρτήσεις και $f = f^+ - f^-$.

Ορισμός 0.10 *Αν $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μια οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτηση $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu := \int_{\mathbb{X}} f^+ \, d\mu - \int_{\mathbb{X}} f^- \, d\mu$*

Ορισμός 0.11 *Η συνάρτηση $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ ονομάζεται* **ολοκληρώσιμη** *αν $\int_{\mathbb{X}} | \, f \, | \, d\mu < \infty$.*

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα (μέση τιμή) για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$.

Γενικές ιδιότητες του ολοκληρώματος

Πρόταση 0.6 *Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ χώρος μέτρου και $f, g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ μετρήσιμες συναρτήσεις.*

1. *Το ολοκλήρωμα είναι γραμμικός και θετικός τελεστής.*
2. *Για οποιαδήποτε ολοκληρώσιμη συνάρτηση ισχύει ότι $\left|\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu\right| \leq \int_{\mathbb{X}} | \, f \, | \, d\mu$*
3. *Αν $A, B \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $A \cap B = \emptyset$ τότε $\int_{A \cup B} f \, d\mu = \int_A f \, d\mu + \int_B f \, d\mu$*
4. *Αν $A, B \subset \mathbb{X}$ τέτοια ώστε $\mu(A) \leq \mu(B)$ και f θετική συνάρτηση τότε $\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu$*
5. *Το ολοκλήρωμα δεν καταλαβαίνει σύνολα μέτρου 0, δηλαδή αν $f = g$ μ-σχεδόν παντού, τότε $\int_{\mathbb{X}} f \, d\mu = \int_{\mathbb{X}} g \, d\mu$*

Ακολουθίες συναρτήσεων ή τυχαίων μεταβλητών και ολοκλήρωση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια ακολουθία συναρτήσεων $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f_n \to f$, σ.π.(μ). Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι $\int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu \to \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu$; Η απάντηση είναι γενικά **όχι**!

Πρόταση 0.7 **(Μονότονη σύγκλιση, Beppo Levi)** *Έστω ότι $f_n \uparrow f$ σ.π. Τότε $\int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu \to \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu$.*

Πρόταση 0.8 **(Fatou)** *Έστω $f_n \geq 0$, $\forall n$. Ισχύει ότι $\int_{\mathbb{X}} \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu$.*

Πρόταση 0.9 **(Κυριαρχημένη σύγκλιση)** *Έστω ότι υπάρχει συνάρτηση g τέτοια ώστε $| f_n | \leq g$ σχεδον παντού για κάθε n, και επιπλεον $\int_{\mathbb{X}} | g | \, d\mu \leq \infty$. Τότε, $\int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu \to \int_{\mathbb{X}} f \, d\mu$.*

Χώροι L^p

Ορισμός 0.12 *Έστω χώρος μέτρου $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ (ή χώρος πιθανοτήτων). Θα συμβολίζουμε με $L^p(\mu)$, $p \geq 1$ το σύνολο των συναρτήσεων $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ (τυχαίων μεταβλητών) οι οποίες είναι μετρήσιμες ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{F}$ και για τις οποίες ισχύει $\int_{\mathbb{X}} | f(\omega) |^p \, d\mu < \infty$.*
Η απεικόνιση $|| \cdot ||_{L^p(\mu)}$: $L^p(\mu) \to \mathbb{R}^+$, που ορίζεται ως $|| f ||_{L^p(\mu)} := \{\int_{\mathbb{X}} | f(\omega) |^p \, d\mu\}^{\frac{1}{p}}$ ονομάζεται νόρμα του χώρου $L^p(\mu)$.
Ο χώρος είναι μετρικος χώρος με την μετρική $d(f_1, f_2) = \{\int_{\mathbb{X}} | f_1 - f_2 |^p, d\mu\}^{\frac{1}{p}} = || f_1 - f_2 ||_{L^p(\mu)}$.

Στην περίπτωση όπου $p = \infty$ παίρνουμε τον χώρο $L^\infty(\mu)$ η νόρμα του οποίου είναι η $|| f ||_{L^\infty} = ess \sup_{x\in\mathbb{X}} | f(x) |$. Συνεπώς, ο χώρος $L^\infty(\mu)$ περιέχει τις ουσιωδώς φραγμένες συναρτήσεις (τυχαίες μεταβλητές).

Οι χώροι αυτοι συνδέονται μεταξύ τους με μία σημαντική ανισότητα, την ανισότητα του Hölder .

Πρόταση 0.10 **(Ανισότητα Hölder)** *Έστω δύο p, q για τους οποίους ισχύει $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p, q \geq 1$. Αν $f \in L^p(\mu)$ και $g \in L^q(\mu)$, τότε, $f\, g \in L^1(\mu)$ και μάλιστα $|| f\, g ||_{L^1(\mu)} \leq || f ||_{L^p(\mu)} || g ||_{L^q(\mu)}$. Η ισότητα ισχύει ανν $|f|^p = \lambda\, |g|^q$, σ.π(μ), για κάποιο $\lambda > 0$.*

Πρόταση 0.11 **Ανισότητα Minkowski)** *Αν $f, g \in L^p$, τότε $f + g \in L^p$ και $||f + g||_{L^p} \leq ||f||_{L^p} + ||g||_{L^p}$.*

Η ανισότητα αυτή είναι πολύ σημαντική στο να δείξουμε την τριγωνική ανισότητα για την νόρμα L^p. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της σύγκλισης μιας ακολουθίας στοιχείων του $L^p(\mu)$, $p \geq 1$.

Ορισμός 0.13 *Έστω $f^{(n)}$ μία ακολουθία στοιχείων του $L^p(\mu)$. Θα λέμε ότι η ακολουθία $f^{(n)}$ συγκλίνει στο στοιχείο $f \in L^p(\mu)$ αν $|| f^{(n)} - f ||_{L^p(\mu)} \to 0$ δηλαδή αν για κάθε $\epsilon > 0$ μπορεί να βρεθεί $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε για κάθε $n > N$ ισχύει $|| f^{(n)} - f ||_{L^p(\mu)} < \epsilon$.*

Ορισμός 0.14 *Η ακολουθία $f^{(n)} \in L^p(\mu)$ ονομάζεται Cauchy αν $\forall\, \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|| f^{(n)} - f^{(m)} ||_{L^p(\mu)} < \epsilon$ για $n, m > N$.*

Θεώρημα 0.1 *Οι χώροι $L^p(\mu)$ είναι πλήρεις, δηλαδή για κάθε ακολουθία Cauchy $f^{(n)} \in L^p(\mu)$ υπάρχει $f \in L^p(\mu)$ τέτοια ώστε $f^{(n)} \to f$.*

Θεώρημα 0.2 *Εστω $\mathbb{X} = \mathbb{R}$.Ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων με συμπαγή φορέα, C_c είναι πυκνός στον L^p.*

Απο την ανισότητα Hölder προκύπτει το πολύ βασικό θεώρημα αναπαράστασης του Riesz . Ας υποθέσουμε ότι παίρνουμε το σύνολο όλων των γραμμικών και φραγμένων απεικονίσεων απο το $L^p \to \mathbb{R}$. Το σύνολο αυτό θα το σύμβολίζουμε με $(L^p)^{'}$) (ο δυικός χώρος του L^p). Ένα παράδειγμα μίας τέτοια απεικόνιση είναι το ολοκλήρωμα Lebesgue . Το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz μας διαβεβαιώνει ότι κάθε απεικόνιση με τις ιδιότητες αυτές μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα ολοκλήρωμα.

Θεώρημα 0.3 **(Riesz)** *Αν $1 < p < \infty$, και $\phi \in (L^p)^{'}$ τότε υπάρχει μοναδικό $u \in L^{p'}$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ τέτοιο ώστε $\phi(f) = \int_{\mathbb{X}} u\, f\, d\mu$ για κάθε $f \in L^p$.*

Θεώρημα 0.4 **(Ενσφηνώσεις χώρων Lebesgue)** *Αν $M = \mu(\mathbb{X}) < \infty)$, $1 \geq p \leq q < \infty$, και $f \in L^q$ τότε $||f||_{L^p} \leq C\, ||f||_{L^q}$, $C = M^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}}$. Κατά συνέπεια μπορούμε να πούμε ότι $L^q \subset L^p$.*

Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι υπάρχει μια απεικόνιση $I : L^q \to L^p$, η οποία παίρνει ένα $f \in L^q$ και το πηγαίνει στο αντίστοιχο $f \in L^p$. Η απεικόνιση αυτή ονομάζεται απεικόνιση ενσφήνωσης (embedding) και είναι συνεχής απεικόνιση.

Οι χώροι L^2

Ο χώρος L^2 έχει μία ειδική ιδιότητα. Στον χώρο αυτό η νόρμα μπορεί να οριστεί με την βοήθεια μίας άλλης απεικονισης που ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο**.

Ορισμός 0.15 *Έστω M ένας γραμμικός χώρος και η απεικόνιση $< \cdot, \cdot >$: $M \times M \to \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες*

1. $< x, x > \geq 0$ και $< x, x > = 0$ αν και μόνο αν $x = 0$.
2. $< x_1, x_2 > = < x_2, x_1 >$
3. $< \lambda_1\, x_1 + \lambda_2\, x_2, x_3 > = \lambda_1 < x_1, x_3 > + \lambda_2 < x_2, x_3 >$ για κάθε $x_1, x_2, x_3 \in M$ και $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Η απεικόνιση $< \cdot, \cdot >$ ονομάζεται **εσωτερικό γινόμενο** *στον M.*

Το εσωτερικό γινόμενο είναι η γενίκευση της έννοιας του εσωτερικού γινομένου όπως την έχουμε συναντήσει στον ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα 0.2 *Στον χώρο $L^2(\mu)$ σαν εσωτερικό γινόμενο μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση $< f, g > = \int_{\mathbb{X}} f\, g\, d\mu$.*
Αν ο χώρος $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ είναι χώρος πιθανοτήτων τότε το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να εκφραστεί και ως $< X, Y > = \mathbb{E}_\mu[X\, Y]$.

Η νορμα του χώρου $L^2(\mu)$ μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια του εσωτερικού γινομένου ως $|| f ||_{L^2(\mu)} = \{< f, f >\}^{1/2}$. Χώροι με την ιδιότητα αυτή ονομάζονται χώροι εσωτερικού γινομένου. Ένας πλήρης χώρος εσωτερικού γινομένου ονομάζεται χώρος Hilbert .

Πρόταση 0.12 *Αν η νόρμα $|| \cdot ||$ παράγεται απο ένα εσωτερικό γινόμενο ισχύει ο κανόνας του παραλληλογράμμου δηλαδή για κάθε $x, y \in H$ ισχύει $||x + y|| + ||x - y|| = 2\, ||x|| + 2\, ||y||$.*

Πρόταση 0.13 *Ο χώρος $L^2(\mu)$ είναι χώρος Hilbert και είναι ο μόναδικός από τους χώρους L^p με την ιδιότητα αυτή.*

Για να δείξουμε ότι οι χώροι L^p, $p \neq 2$ δεν είναι χώροι Hilbert αρκεί να βρούμε ένα ζεύγος στοιχείων τους που δεν ικανοποιούν τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Η ειδική περίπτωση της ανισότητας Hölder για $p = q = 2$ ονομάζεται ανισότητα Cauchy-Schwartz.

Το θεώρημα προβολής

Θα ξεκινήσουμε δίνοντας την έννοια του υποχώρου και της καθετότητας.

Ορισμός 0.16 *Έστω H ένας χώρος Hilbert και $M \subset H$. Το M ονομάζεται υπόχωρος αν ικανοποιούνται οι ιδιότητες*

1. *Αν $x_1, x_2 \in M$ τότε και $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in M$ για κάθε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.*
2. *Έστω $x^{(n)} \in M$ μία οποιαδήποτε ακολουθία στοιχείων του M. Αν $x^{(n)} \to x$ με την έννοια της σύγκλισης στον H (δηλαδή $\| x^{(n)} - x \|_H \to 0$) τότε $x \in M$, δηλαδή το οριο κάθε συγκλίνουσας ακολουθίας του M ανήκει επίσης στο M.*

Ορισμός 0.17 *Έστω M ένας χώρος εσωτερικού γινομένου με εσωτερικό γινόμενο $< \cdot, \cdot >$. Τα στοιχεία x και y του M ονομάζονται* **κάθετα** *αν $< x, y >= 0$.*

Παράδειγμα 0.3 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ένας χώρος πιθανοτήτων και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$. Ας ορίσουμε ως $H = L^2(\mu, \mathcal{F})$ τον χώρο των συναρτήσεων $X : \Omega \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι μετρήσιμες ως προς την $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{F}$. Αν ορίσουμε ως $M = L^2(\mu, \mathcal{G})$ τον χώρο των συναρτήσεων $X' : \Omega \to \mathbb{R}$ οι οποίες είναι μετρήσιμες ως προς την $\sigma-$άλγεβρα $\mathcal{G}$, τότε ο M είναι υπόχωρος του H.*

Ας θεωρήσουμε ένα χώρο Hilbert H και ένα υπόχωρο του M. Ας υποθεσουμε οτι επιλεγουμε ένα οποιοδήποτε στοιχείο $x \in H$ και θέτουμε το ερώτημα της εύρεσης ενός στοιχείου $m^* \in M$ το οποίο να απέχει την μικρότερη απόσταση απο το σημείο x. Το πρόβλημα αυτό μπορεί να διατυπωθεί μαθηματικά σαν ένα πρόβλημα βελτιστοποίησης, δηλαδή σαν το πρόβλημα της εύρεση ενός στοιχείου $m^* \in M$ τέτοιο ώστε $\inf_{m \in M} \| x - m \|_H = \| x - m^* \|_H$.

Θεώρημα 0.5 *(***Το θεώρημα προβολής***)*
Έστω H ένας χώρος Hilbert , $M \subset H$ ένας υπόχωρος του και $x \in H$. Τότε

1. *Υπάρχει μοναδικό $m^* \in M$ τέτοιο ώστε $\inf_{m \in M} \| x - m \|_H = \| x - m^* \|_H$*
2. *Για το m^* ισχύει ότι $(x - m^*, m)_H = 0$ για κάθε $m \in M$, δηλαδή το $x - m^*$ είναι κάθετο σε κάθε στοιχείο του M. Η συνθήκη αυτή είναι αναγκαία και επαρκής.*

Το m^* ονομάζεται **προβολή** *του x στον υπόχωρο M και συμβολίζεται $m^* = \Pi_M x$.*

Πρόταση 0.14 *Μπορεί να οριστεί μια απεικόνιση $\Pi_M : H \to M$, με βάση τον $\Pi_M x := m^*$, η οποία είναι γραμμική και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες.*

1.	$\Pi_M^2 = \Pi_M$	3.	*Αν* $x \in M^\perp$ *τότε* $\Pi_M x = 0$
2.	*Αν* $x \in M$ *τότε* $\Pi_M x = x$.	4.	$(\Pi_M x, y)_H = (x, \Pi_M y)_H$

Παράδειγμα 0.4 *Έστω $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu) = (\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \to \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Έστω επίσης $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ μια ς υπο-άλγεβρα. Η υπο συνθήκη μέση τιμή $\mathbb{E}_\mu[X \mid \mathcal{G}]$ μπορεί να κατανοηθεί σαν την προβολή της X (ως στοιχείο του $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ στον υπόχωρο του $L^2(\Omega, \mathcal{G}, \mu)$. Όλες οι ιδιότητες της υ.ς.μ.τ. προκύπτουν απο τις ιδιότητες της προβολής.*

Ασκήσεις

1. Διατυπώστε και αποδείξτε το ανάστροφο λήμμα του Fatou (α) για ακολουθίες συνόλων και (β) για ακολουθίες συναρτήσεων.
2. Δίνεται η ακολουθία συνόλων, $A_n = [0, 1/n]$ αν n περιττός και $A_n = [0, n]$ αν n άρτιος. Βρείτε τα ανω και κάτω όρια. Υπάρχει το όριο;
3. Δειξτε ότι αν υπάρχουν ισχύει $\mu(\lim_n E_n) \leq \lim_n \mu(E_n)$.
4. Δείξτε ότι αν η συνθήκη του Caratheodory δεν ικανοποιείται το εξωτερικό μέτρο δεν ειναι αθροιστικο για σύνολα που είναι ξένα μεταξύ του – μπορείτε να περιοριστείτε στα 2 σύνολα.
5. Δείξτε ότι η ένωση μηδενοσυνόλων είναι μηδενοσύνολο για οποιοδήποτε μέτρο. Με βάση αυτό υπολογίστε το μέτρο Lebesgue για το σύνολο $\mathbb{Q}$.
6. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δείξτε την συνέχεια και την παραγωγισιμότητα της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\phi(\lambda) = \mathbb{E}_\mu[exp(i\lambda X)]$ για κάποια τυχαία μεταβλητή X.
7. Δείξτε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης δηλαδή ότι αν $f_n \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και αν $\mu(\mathbb{X}) < \infty$ τότε $f_n \to f$, σ.π $\longrightarrow \int_{\mathbb{X}} f_n \, d\mu$
8. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder δείξτε το θεώρημα ενσφήνωσης για τους χώρους Lebesgue
9. Δείξτε το λήμμα Borel-Cantellisύμφωνα με το οποίο αν A_n είναι μια ακολουθία γεγονότων τέτοια ώστε $\sum_{i=1}^\infty \mu(A_i) < \infty$ τότε $\mu(\bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{j=n}^\infty A_j) = 0$.
10. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων $f^{(n)}(x) = n\, x\, e^{-n\, x^2}$. Ισχύει ή όχι η ισότητα $\int_0^1 \lim_n f^{(n)}(x)\, dx = \lim_n \int_0^1 f^{(n)}(x)\, dx$ Σχολιάστε το αποτέλεσμα σε συνδυασμό με το θεώρημα κυριαρχημενης σύγκλισης.
11. Θεωρείστε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n(x) = \frac{n \, sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}}$. Βρείτε το όριο της $f_n(x)$ καθώς $n \to \infty$ καθώς και το $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx$.
12. Αν X τυχαία μεταβλητή τέτοια ώστε $\mathbb{E}[\mid X \mid] < \infty$ και $X_n(\omega) = X(\omega)\, \mathbf{1}_{[-n,n]}(\omega)$ δείξτε ότι $\mathbb{E}[\mid X_n - X \mid] \to 0$.

Εργασίες

1. Η κατασκευη του μέτρου για ένα μετρικό χώρο και εφαρμογές.
2. Η κατασκευή του ολοκληρώματος Itô και οι ιδιότητες του.
3. Η σύγκλιση σε κατανομή και εφαρμογή στην θεωρία της προσομοίωσης.
4. Η σύγκλιση σε κατανομή και το συνεχές όριο του διωνυμικού μοντέλου στα χρηματοοικονομικά.
5. Θεωρήματα σύγκλισης για την υπο συνθήκη μέση τιμή και εφαρμογές στις martingales και την στατιστική.
6. Κεντρικά οριακά θεωρήματα.

Θεωρία μέτρου και πιθανότητων, ΠΜΣ Ειδίκευσης στην Στατιστική, Διάλεξη 3
Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σε ότι ακολουθήσει θα θεωρούμε $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ ένα χώρο με μέτρο. Η περίπτωση όπου $X = \Omega$, ένα σύνολο ενδεχόμενων και $\mu = P$ ένα μέτρο πιθανότητας είναι ειδική περίπτωση.

Επίσης $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ θα είναι μια ακολουθία συναρτήσεων. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbb{X} = \Omega$ ένα σύνολο ενδεχομένων, η ακολουθία συναρτήσεων θα συμβολίζεται με $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ και θα ονομάζεται ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

Σύγκλιση σχεδόν παντού

Ορισμός 0.1 *Θα λέμε ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει σχεδόν παντού ως προς το μέτρο μ στο $D \subset \mathbb{X}$ αν $\lim_n f(x)$ υπάρχει και είναι πεπερασμένο στο $D \setminus N$, όπου $\mu(N) = 0$.*

Πρόταση 0.1 *Ισχύουν τα ακόλουθα*

1. $\{x \in \mathbb{X} : \lim_n f_n = f\} = \bigcap_m \bigcup_N \bigcap_p \{x \in \mathbb{X} : |f_{N+p} - f| < \frac{1}{m}\}$
2. $f_n \to f$, *σχεδόν παντού στο $\mathbb{X}$ ανν* $\mu(\limsup_n \{x \in \mathbb{X} : |f_n - f| \geq \frac{1}{m}\}) = 0$ *για κάθε* $m \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 0.2 (Λήμμα Borel-Cantelli) *Αν A_n είναι μια ακολουθία συνόλων τέτοια ώστε $\sum_n \mu(A_n) < \infty$ τότε $\mu(\lim_n \sup A_n) = 0$.*

Πρόταση 0.3 *Έστω ότι υπάρχει μια ακολουθία $r_n \geq 0$ τέτοια ώστε $\lim_n r_n = 0$, και $\sum_n \mu(x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq r_n) < \infty$. Τότε, $f_n \to f$, $\sigma.\pi - (\mu)$.*

Η απόδειξη βασίζεται στο λήμμα Borel - Cantelli.

Σχεδόν ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 0.2 *Θα λέμε ότι η ακολουθία f_n συγκλίνει σχεδόν ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει μετρήσιμο υποσύνολο $E \subset \mathbb{X}$ τέτοιο ώστε $\mu(E) < \delta$ και $f_n \overset{\rightarrow}{\rightarrow} f$ (συγκλίνει ομοιόμορφα) στο $\mathbb{X} \setminus E$.*

Θεώρημα 0.1 (Egoroff) *Αν $\mu(X) < \infty$ και η ακολουθία $f_n \to f$ $\sigma.\pi\,(\mu)$ τότε η f_n συγκλίνει στην f σχεδόν ομοιόμορφα.*

Σύγκλιση σε μέτρο

Ορισμός 0.3 *Θα λέμε ότι η ακολουθία $f_n \overset{\mu}{\to} f$ (συγκλίνει στο μέτρο) αν για κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει ότι $\lim_n \mu(\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\} = 0$*

Ισοδύναμος ορισμός είναι και ο ακόλουθος: Για κάθε $\epsilon > 0$ και $\eta > 0$ υπάρχει N τέτοιο ώστε $\mu(\{x \in \mathbb{X} : |f_n(x) - f(x)| \geq \epsilon\}) < \eta$ για $n > N$. Το N εξαρτάται απο την επιλογή των ϵ, η.

Στον ορισμό αυτό μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon = \eta$.

Το όριο με την έννοια της σύγκλισης στο μέτρο είναι μοναδικό.

Θεώρημα 0.2 *Ισχύουν τα ακόλουθα*

1. *Αν $\mu(\mathbb{X}) < \infty$, τότε $f_n \to f$, $\sigma.\pi - (\mu) \implies f_n \overset{\mu}{\to} f$*
2. *Αν $f_n \overset{\mu}{\to} f$ τότε υπάρχει* **υπακολουθία** *f_{n_k} τέτοια ώστε $f_{n_k} \to f$ $\sigma.\pi - (\mu)$*

Είναι ενδιαφέρον να χαρακτηρίσουμε τις ακολουθίες Cauchy για την σύγκλιση στο μέτρο.

Ορισμός 0.4 *Θα λέμεότι μια ακολουθία f_n είναι Cauchy για την σύγκλιση στο μέτρο αν για κάθε $\epsilon > 0$ και $\eta > 0$ υπάρχει N (το οποίο εξαρτάται απο το ϵ και το η) τέτοιο ώστε $\mu(\{x \in \mathbb{X} : |f_m(x) - f_n(x)| \geq \epsilon\}) < \eta$, για $m, n \geq N$. Μπορούμε να επιλεξουμε $\epsilon = \eta$.*

Η πληρότητα διατηρείται για την σύγκλιση στο μέτρο.

Πρόταση 0.4 *Αν η ακολουθία f_n είναι Cauchy ως προς την σύγκλιση στο μέτρο τότε υπάρχει f (μετρήσιμη) τέτοια ώστε $f_n \overset{\mu}{\to} f$.*

Σύγκλιση στον $L^p(\mu)$

Ορισμός 0.5 *Η ακολουθία συναρτήσεων στον $f_n \to f$ στον L^p αν $||f_n - f||_{L^p(\mu)} \to 0$.*

Πρόταση 0.5 *Αν $f_n \to f$ στον $L^p(\mu)$ τότε $f_n \overset{\mu}{\to} f$*

Το ακόλουθο είναι μια χρήσιμη συνέπεια του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης

Πρόταση 0.6 *Έστω ότι $f_n \overset{\mu}{\to} f$ και $|f_n| \leq g$ για κάθε n με $g \in L^p(\mu)$. Τότε $|f| \in L^p(\mu)$ και $f_n \overset{L^p(\mu)}{\to} f$.*

Ασθενής σύγκλιση

Για την παράγραφο αυτή θα επικεντρώσουμε στην περίπτωση όπου καταλαβαίνουμε την ακολουθία συναρτήσεων f_n σαν μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n.

Ας θεωρήσουμε πρώτα μια ακολουθία απο μέτρα μ_n σε ένα μετρήσιμο χώρο $(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ και ένα μέτρο μ στο ίδιο χώρο.

Ορισμός 0.6 *Θα λέμε ότι η ακολουθία μ_n συγκλίνει ασθενώς στο μέτρο μ και θα συμβολίζουμε $\mu_n \stackrel{w}{\to} \mu$, αν για κάθε πραγματική συνεχής και φραγμένη συνάρτηση f ισχύει $\int_{\mathbb{X}} f\, d\mu_n \to \int_{\mathbb{X}} f\, d\mu$.*

Για την ασθενή σύγκλιση ισχύει το ακόλουθο

Θεώρημα 0.3 *Έστω μια ακολουθία μέτρων μ_n τέτοια ώστε*

$$\lim_{m\to\infty} \sup_n \mu_n([-m,m]^c) = 0 \tag{1}$$

Τότε υπάρχει **υπακολουθία** *μ_{n_k} που συγκλίνει άσθενως σε κάποιο μέτρο μ.*

Η ιδιότητα (1) ονομάζεται tightness και είναι το ανάλογο της συμπάγειας για τα μέτρα.

Σύγκλιση σε κατανομή

Αν τα μέτρα μ_n είναι μέτρα πιθανότητας τότε η σύγκλιση αυτή ονομάζεται σύγκλιση σε κατανομή. Αν X_n είναι μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών τότε μπορούμε να καταλάβουμε τα μ_n σαν τα επαγόμενα μέτρα πιθανότητας απο την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n. Η ασθενής σύγκλιση λοιπόν μπορεί να ερμηνευθεί ως $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$ για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση f. Θα συμβολίζουμε $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} X$. Η έννοια αυτή της σύγκλισης είναι πολύ χρήσιμη στην ατατιστική.

Είναι πολύ σημαντικό να καταλάβουμε ότι στην σύγκλιση σε κατανομή δεν είναι απαραίτητο όλες οι τυχαίες μεταβλητές να ορίζονται στο ίδιο χώρο πιθανότητας! Αυτό συμβαίνει πολλές φορές και στις εφαρμογές, π.χ. σε επαναλαμβανόμενα πειράματα.

Αν όλες οι τυχαίες μεταβλητές ορίζονται στον ίδιο χώρο πιθανότητας μπορούμε να συγκρίνουμε την σύγκλιση σε κατανομή με τις άλλες συγκλίσεις.

Πρόταση 0.7 *Αν $X_n \stackrel{\mu}{\to} X$ τοτε $X_n \stackrel{\mathcal{D}}{\to} X$*

Σχέση μεταξύ των διαφόρων συγκλίσεων για ακολουθίες συναρτήσεων

$$\begin{array}{ccccc} \text{Σύγκλιση ς.π} & \Longrightarrow & \text{Σύγκλιση σε μέτρο} & \Longrightarrow & \text{Άσθενής σύγκλιση} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{Σύγκλιση } L^p & & \end{array}$$

Επίσης,

$$\boxed{\text{Σύγκλιση σε μέτρο} \Longrightarrow \text{Σύγκλιση ς.π. } \textbf{κατ' υπακολουθία}}$$

$$\boxed{\text{Σύγκλιση στον } L^p \Longrightarrow \text{Σύγκλιση ς.π. } \textbf{κατ' υπακολουθία}}$$

Σχέση μεταξύ των διαφόρων συγκλίσεων για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών

$$\begin{array}{ccccc} \text{Σύγκλιση ς.β} & \Longrightarrow & \text{Σύγκλιση σε πιθανότητα} & \Longrightarrow & \text{Σύγκλιση σε κατανομή} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{Σύγκλιση } L^p & & \end{array}$$

Επίσης,

$$\boxed{\text{Σύγκλιση σε πιθανότητα} \Longrightarrow \text{Σύγκλιση ς.β. } \textbf{κατ' υπακολουθία}}$$

$$\boxed{\text{Σύγκλιση στον } L^p \Longrightarrow \text{Σύγκλιση ς.β. } \textbf{κατ' υπακολουθία}}$$

Θεωρία μέτρου και πιθανότητων, ΠΜΣ Ειδίκευσης στην Στατιστική, Διάλεξη 4

Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σε ότι ακολουθήσει θα θεωρούμε $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ ένα χώρο με μέτρο. Η περίπτωση όπου $X = \Omega$, ένα σύνολο ενδεχόμενων και $\mu = P$ ένα μέτρο πιθανότητας είναι ειδική περίπτωση.

Επίσης $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ θα είναι μια ακολουθία συναρτήσεων. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbb{X} = \Omega$ ένα σύνολο ενδεχομένων, η ακολουθία συναρτήσεων θα συμβολίζεται με $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ και θα ονομάζεται ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

Ασθενής σύγκλιση και σύγκλιση σε κατανομή

Ορισμός 0.1 *Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Αν $X : \Omega \to \mathbb{X}$ μια τυχαία μεταβλητή θα ονομάζουμε επαγόμενο μέτρο $\mu_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ το μέτρο που ορίζεται απο την σχέση $\mu_X(A) = \mu(X^{-1}(A))$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*

Ορισμός 0.2 *Θα λέμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n συγκλίνει σε κατανομή στην τυχαία μεταβλητή X ($X \overset{\mathcal{D}}{\to} X$) αν τα επαγόμενα μέτρα $\mu_{X_n} \overset{w}{\to} \mu_X$, δηλαδή για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση f ισχύει $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$.*

Το διάγραμμα

$$\begin{array}{ccccc} \text{Σύγκλιση ς.β} & \Longrightarrow & \text{Σύγκλιση σε πιθανότητα} & \Longrightarrow & \text{Σύγκλιση σε κατανομή} \\ & & \Uparrow & & \\ & & \text{Σύγκλιση } L^p & & \end{array}$$

μας εξασφαλίζει ότι αν μια ακολουθία $X_n \overset{\text{σε πιθανότητα}}{\to} X$ τότε $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$.

Το αντίστροφο δεν είναι απαραίτητα αληθές. Μια ειδική περίπτωση όπου ισχύει είναι όταν $X = c$ (σταθερά) σχεδόν βέβαια.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι το ποτε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n έχει τουλάχιστον μια υποακολουθία η οποία να συγκλίνει σε κατανομή σε κάποια τυχαία μεταβλητή X. Η απάντηση αυτή μπορεί να μας δωθεί χρησιμοποιώντας τον ορισμό της σύγκλισης σε κατανομή μέσω την σχέση της με την ασθενή σύγκλιση των επαγόμενων μέτρων και το Θεώρημα 0.3 του φυλαδίου 3 σχετικά με το tightness μιας ακολουθίας μέτρων και την ύπαρξη ασθενώς συγκλίνουσα υποακολουθιας

Πρόταση 0.1 *Η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n έχει υποακολουθία X_{n_k} τέτοια ώστε $X_{n_k} \overset{\mathcal{D}}{\to} X$ για κάποια τυχαία μεταβλητή X, αν η ακολουθία επαγόμενων μέτρων μ_{X_n} είναι tight δηλαδή αν $\lim_m \sup_n \mu_{X_n}([-m, m]^c) = 0$.*

Για να ελεγξουμε στην πράξη αν $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$ δεν χρειάζεται να ελέγξουμε ότι $\mathbb{E}[f(X_n] \to \mathbb{E}[f(X)]$ για κάθε φραγμένη και συνεχή συνάρτηση f, αλλά μόνο για τις φραγμένες και συνεχείς κατά Lipschitz συναρτήσεις f.

Κάνοντας χρήση της παραπάνω παρατήρησης έχουμε το πολύ χρήσιμο σε εφαρμογές στατιστικής θεώρημα του Slutsky

Θεώρημα 0.1 (Slutsky) *Αν $X_n, Y_n : \Omega \to \mathbb{R}^n$ δύο ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών τέτοιες ώστε $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$ και $||X_n - Y_n|| \overset{\text{σε πιθανότητα}}{\to} 0$ τότε $U_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$*

Ασθενής σύγκλιση και χαρακτηριστικές συναρτήσεις

Ορισμός 0.3 *Αν $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}^+$ ένα μέτρο, η χαρακτηριστική του συνάρτηση $\phi_\mu : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ ορίζεται σαν η συνάρτηση $\phi_\mu(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} exp(i\,\lambda \cdot x)\, d\mu(x)$.*

Ορισμός 0.4 *Αν X μία τυχαία μεταβλητή και μ_X το επαγόμενο μέτρο της μπορούμε να ορίσουμε την χαρακτηριστική της συνάρτηση $\phi_X(\lambda) := \mathbb{E}[e^{i\lambda \cdot X}] = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\lambda \cdot x} d\mu_X(x)$.*

Η χαρακτηριστική συνάρτηση είναι μια συνεχής συνάρτηση $\phi_X : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$. Αν η τυχαία μεταβλητή X έχει ροπές μέχρι και τάξης m, τότε είναι και m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη ως προς το όρισμα λ.

Παράδειγμα 0.1 *Αν $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ τότε $\phi_X(\lambda) = exp(i\,\lambda\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\lambda^2$.*

Παράδειγμα 0.2 *Αν $X \sim Exp(\mu)$ τότε $\phi_x(\lambda) = \frac{\mu}{\mu - i\lambda}$*

Παράδειγμα 0.3 *Αν $X \sim Pois(\mu)$ τότε $\phi_X = \mathbb{E}[exp(i\lambda X)] = \sum_{k=0}^{\infty} exp(i\lambda k)\, \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\mu} = exp(\mu(e^{i\lambda} - 1))$.*

Η χαρακτηριστική συνάρτηση μπορεί να θεωρηθεί σαν τον μετασχηματισμό Fourier του μέτρου πιθανότητας και χαρακτηρίζει μοναδικά την τυχαία μεταβλητή και την κατανομή της. Επίσης οι ροπές μιας τυχαίας μεταβλητής μπορεί να υπολογιστούν από τις διαδοχικές παραγώγους της χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Οι χαρακτηριστικές συναρτήσεις μας βοηθούν στο να ελέγξουμε την ασθενή σύγκλιση ακολουθιών μέτρων

Θεώρημα 0.2 (Levy) *Έστω μ_n μια ακολουθία μέτρων και $\phi_n(\lambda) := \phi_{\mu_n}(\lambda)$ η ακολουθία χαρακτηριστικών συναρτήσεων.*
(1) Αν $\mu_n \overset{w}{\to} \mu$ τότε $\phi_n(\lambda) = \phi(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^d$
(2) Αν $\phi_n(\lambda) \to \phi(\lambda)$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^d$ και αν ϕ συνεχής στο 0 τότε υπάρχει μέτρο μ στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ τέτοιο ώστε $\phi(\lambda) = \phi_\mu(\lambda)$ και $\mu_n \overset{w}{\to} \mu$

Παράδειγμα 0.4 *Αν X_n ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n \sim Pois(n)$ και $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}}(X_n - n)$ τότε $Z_n \overset{\mathcal{D}}{\to} Z$, και $Z \sim N(0,1)$.*
Ο υπολογισμός της ακολουθίας χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\phi_n(\lambda)$ μας δίνει $\phi_n(\lambda) = \mathbb{E}[exp(i\lambda X_n)] = exp(-i\,\lambda\,\sqrt{n})\, exp(n\,(i\,\frac{\lambda}{\sqrt{n}} - 1))$.
Μπορεί κανείς να δείξει ότι $\phi_n(\lambda) \to e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$ και αυτή είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της τυπικής κανονικής μεταβλητής.

Παράδειγμα 0.5 *Αν X_n ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n \sim Bin(n, p_n)$ και $lim_n n p_n = \nu$ τότε $X_n \overset{\mathcal{D}}{\to} X$, και $X \sim Pois(\nu)$.*
Ο υπολογισμός της ακολουθίας χαρακτηριστικών συναρτήσεων $\phi_n(\lambda)$ μας δίνει $\phi_n(\lambda) = \mathbb{E}[exp(i\lambda X_n)] = [1 + p_n\,(exp(i\lambda) - 1)]^n$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι $\phi_n(\lambda) \to exp(\nu\,(e^{i\lambda} - 1))$ και αυτή είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Poisson.

Αντιπαραδείγματα για την σύγκλιση

- Η σύγκλιση σε κατανομή δεν συνεπάγεται την σύγκλιση σε πιθανότητα.

  Αν X οποιαδήποτε συμμετρική τυχαία μεταβλητή και αν πάρουμε την ακολουθία $X_n = -X$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ τότε $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ αλλά $X_n \stackrel{P}{\not\to} X$ εφόσον για κάθε $\epsilon > 0$ δεν ισχύει $P(|X_n - X| > \epsilon) = P(|X| > \frac{1}{2}\epsilon) \to 0$, για $n \to \infty$.

- Η σύγκλιση σε πιθάνότητα δεν συνεπάγεται την σύγκλιση σχεδόν βέβαια.

  Αν X_n ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών τέτοιων ώστε $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ και $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$ αλλά $X_n \stackrel{\sigma.\beta}{\not\to} 0$.

- Η σύγκλιση σε πιθανότητα δεν συνεπάγεται την σύγκλιση στον L^p.

  Ας θεωρήσουμε την ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_n τέτοιων ώστε $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ και $P(X_n = n) = 1 - \frac{1}{n}$ τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$ αλλά $X_n \stackrel{L^1}{\not\to} 0$.

- Η σύγκλιση L^r δεν συνεπάγεται σχεδόν βέβαιη σύγκλιση.

  Δίνεται η ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλήτών X_n, τέτοια ώστε $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^{1/4}}$ και $P(X_n = \pm 1) = \frac{1}{2\, n^{1/4}}$. Μπορει κανείς να δείξει ότι $X_n \xrightarrow{L^2} 0$ αλλά $X_n \stackrel{P}{\not\to} 0$.

- Η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση δεν συνεπάγεται σύγκλιση L^r

  Δίνεται η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n, τέτοια ώστε $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^{\alpha}}$ και $P(X_n = \pm n) = \frac{1}{2\, n^{\alpha}}$. Μπορει κανείς να δείξει ότι αν $\alpha \in [\frac{3}{2}, 2]$, $X_n \xrightarrow{\sigma.\beta} 0$ αλλά $X_n \stackrel{L^2}{\not\to} 0$.

- Η σύγκλιση σε πιθανότητα $X_n \xrightarrow{P} X$, δεν συνεπάγεται ότι $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ για οποιαδηποτε συνάρτηση g.

  Αν $X_n \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ και $g(x) = \mathbf{1}_{x>0}$ τότε $X_n \xrightarrow{P} X$, με $X = 0,\ \sigma.\beta$. Απο την άλλη $g(X) = 0,\ \sigma.\beta$ οπότε $g(X_n) \stackrel{P}{\not\to} g(X)$

- Η σύγκλιση σε πιθανότητα δεν συνεπάγεται την σύγκλιση σε μέση τιμή, $X_n \xrightarrow{P} X$, δεν σημαίνει απαραίτητα ότι $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X]$.

  Αν $X_n(\omega) = n^2$ αν $0 \le \omega \le n^{-1}$ και $X_n(\omega) = 0$ αν $n^{-1} \le \omega \le 1$ τότε $X_n \xrightarrow{P} 0$ αλλά επειδή $\mathbb{E}[X_n] = n$ δεν ισχύει $\mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] = 0$.

Εφαρμογή: Το κεντρικό οριακό θεώρημα

Θεώρημα 0.3 *Αν X_n ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}[X_n] = \nu$ και $VarX_n) = \sigma^2 < \infty$ και $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ τότε $Y_n = \frac{S_n - n\,\nu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{D}} Z$ όπου $Z \sim N(0,1)$*

Απόδειξη Μπορούμε να δείξουμε (χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία) οτι $\phi_{Y_n}(\lambda) = \left(\phi\left(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right)^n$, όπου $\phi(\lambda)$ η χαρακτηριστική συνάρτηση των X_n. Επειδή η συνάρτηση αυτή έχει 2 συνεχείς παραγώγους, μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά Taylor ως $\phi(\lambda) = 1 - \frac{\sigma^2\lambda^2}{2} + o(\lambda^2)$. Κατά συνέπεια, $\phi_{Y_n}(\lambda) = exp(n\, ln\phi(\frac{\lambda}{\sigma\sqrt{n}}) = exp(nln(1 - \frac{\lambda^2}{2n} + ...))$ και υπολογίζοντας το όριο βρίσκουμε ότι $\lim_n \phi_{Y_n}(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. Άρα η ακολουθία Y_n συγκλίνει σε κατανομή στην $Z \sim N(0,1)$ $\blacksquare$.

Θεωρία μέτρου και πιθανότητων, ΠΜΣ Ειδίκευσης στην Στατιστική, Διάλεξη 5
Α. Ν. Γιαννακόπουλος, Τμήμα Στατιστικής, Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Σε ότι ακολουθήσει θα θεωρούμε $(\mathbb{X}, \mathcal{F}, \mu)$ ένα χώρο με μέτρο. Η περίπτωση όπου $X = \Omega$, ένα σύνολο ενδεχόμενων και $\mu = P$ ένα μέτρο πιθανότητας είναι ειδική περίπτωση.

Επίσης $f_n : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ θα είναι μια ακολουθία συναρτήσεων. Στην ειδική περίπτωση όπου $\mathbb{X} = \Omega$ ένα σύνολο ενδεχομένων, η ακολουθία συναρτήσεων θα συμβολίζεται με $X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ και θα ονομάζεται ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

Δυικοί χώροι

Ορισμός 0.1 *Έστω $\mathbb{X}$ ένας γραμμικός χώρος. Το σύνολο όλων των γραμμικών και συνεχών (ισοδύναμα γραμμικών και φραγμένων) απεικονίσεων απο τον $\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ (συναρτησιακά) ονομάζεται ο δυικός χώρος του $\mathbb{X}$ και συμβολίζεται με $\mathbb{X}'$.*

Ο δυικός χώρος είναι και αυτός ένας γραμμικός χώρος ο οποίος μπορεί να γίνει μετρικος χώρος με την μετρική $||T||_{\mathbb{X}'} = \sup_{x \in X, ||x||_X = 1} |Tx|$. Θα συμβολίζουμε $T(x) = \langle T, x \rangle$, για $x \in \mathbb{X}$.

Θεώρημα 0.1 (Hahn-Banach) *Ας θεωρήσουμε ένα γραμμικό χώρο $\mathbb{X}$ και ένα αλγεβρικό υπόχωρο του $\widetilde{\mathbb{X}}$. Αν $\widetilde{F}$ είναι ένα γραμμικο σύναρτησιακό στον $\widetilde{\mathbb{X}}$ τέτοιο ώστε για κάποιο $M > 0$, $|\widetilde{F}(x)| \leq M \, ||x||_{\widetilde{\mathbb{X}}}$ για $x \in \widetilde{\mathbb{X}}$, τότε υπάρχει γραμμικο συναρτησιακό F στον $\mathbb{X}$, τέτοιο ώστε $Fx = \widetilde{F}x$, για κάθε $x \in \widetilde{\mathbb{X}}$ και $|F(x)| \leq M \, ||x||_{\mathbb{X}}$, για κάθε $x \in \mathbb{X}$.*

Παράδειγμα 0.1 *Έστω $\mathbb{X} = c_0$ ο χώρος των ακολουθίων x_n τέτοιων ώστε $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. Το F είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό απο τον c_0 στον $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία a_n στον ℓ^1 τέτοια ώστε $F(x) = \sum_n a_n x_n$. Κατά συνέπεια $(c_0)' \simeq \ell^1$.*

Παράδειγμα 0.2 *Έστω $\mathbb{X} = \ell^1$ ο χώρος των αθροίσιμων ακολουθίων $\{x_n\}$. Το F είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό απο τον ℓ^1 στον $\mathbb{R}$, αν και μόνον αν υπάρχει ακολουθία a_n στον ℓ^∞ τέτοια ώστε $F(x) = \sum_n a_n x_n$. Κατά συνέπεια $(\ell^1)' \simeq \ell^\infty$.*

Οι συνεχείς συναρτήσεις και τα προσημασμένα μέτρα: Μια σχέση δυισμού

Ορισμός 0.2 *Μια απεικόνιση $\mu : \mathcal{B}(\mathbb{Y}) \to \mathbb{R}$ ονομάζεται προσημασμένο μέτρο αν (i) $\mu(\emptyset) = 0$ και (ii) $\mu(\bigcup_j A_j) = \sum_j \mu(A_j)$ για ακολουθία συνόλων στο $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ ανα δύο ξένων.*

Ένα προσημασμένο μέτρο μ έχει αναπαράσταση $\mu = \mu^+ - \mu^-$ όπου $\mu^\pm$ είναι μέτρα. Ο χώρος των προσημασμένων μέτρων στο $\mathbb{Y}$ θα συμβολίζεται με $\mathbb{B}M_{\mathbb{Y}}$ και μπορεί να θεωρηθεί ως μετρικός χώρος με μετρική την ποσότητα $||\mu||(\mathbb{Y}) = \mu^+(\mathbb{Y}) + \mu^-(\mathbb{Y})$ (συνολική μεταβολή). Ο χώρος των προσημασμένων μέτρων με την μετρική αυτή είναι χώρος Banach .

Θεώρημα 0.2 *Έστω $\mathbb{Y} = [0,1]$ και $\mathbb{X} = C([0,1])$. Το F είναι ένα γραμμικό συναρτησιακό του $\mathbb{X}$ αν και μόνο αν υπάρχει προσημασμένο μέτρο Borel τέτοιο ώστε $F(f) = \int_{[0,1]} f \, d\mu$, για κάθε $f \in \mathbb{X}$. Ισχύει ότι $||F||_{\mathbb{X}'} = ||\mu||$*

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται για $\mathbb{Y}$ οποιονδήποτε τοπικά κυρτό τοπολογικό χώρο και $\mathbb{X} = C_0(\mathbb{Y})$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο (Θεώρημα του Riesz).

Το παραπάνω θεώρημα μας λέει ότι $(C([0,1]))' \simeq \mathbb{B}M_{[0,1]}$.

Ο L^1 και ο L^∞: Μια σχέση δυισμού.

Θεώρημα 0.3 *Αν $\mathbb{X} = L^1(\mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))$ τότε το F είναι ένα φραγμένο και γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathbb{X}$ αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $y \in L^\infty \mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))$ τέτοια ώστε $F(x) = \int_{\mathbb{Y}} x \, y \, d\mu$ για κάθε $x \in \mathbb{X}$.*

Συνεπώς $(L^1(\mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))' = L^\infty \mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))$.

Ο L^p και ο L^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $p > 1$: Μια σχέση δυισμού.

Έστω $p > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Θεώρημα 0.4 *Αν $\mathbb{X} = L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))$, $p > 1$ τότε το F είναι ένα φραγμένο και γραμμικό συναρτησιακό στον $\mathbb{X}$ αν και μόνον αν υπάρχει συνάρτηση $y \in L^q \mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))$ τέτοια ώστε $F(x) = \int_{\mathbb{Y}} x \, y \, d\mu$ για κάθε $x \in \mathbb{X}$.*

Συνεπώς $(L^p(\mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))' = L^q \mathbb{Y}, \mathcal{F}, \mu))$.

Ασθενής και $\star$-ασθενής σύγκλιση

Έστω $\mathbb{X}$ ένας μετρικός χώρος και $\mathbb{X}'$ ο δυικός του.

Ορισμός 0.3 *Θα λέμε ότι η ακολουθία x_n συγκλίνει ισχυρά στο x στον $\mathbb{X}$, ($x_n \to x$ αν ισχύει ότι $||x_n) - x||_{\mathbb{X}} \to 0$.*

Ορισμός 0.4 *Θα λέμε ότι η ακολουθία x_n συγκλίνει ασθενώς στο x στον $\mathbb{X}$, ($x_n \rightharpoonup x$ αν για κάθε $F \in \mathbb{X}'$ ισχύει ότι $F(x_n) \to F(x)$.*

Αν μια ακολουθία συγκλίνει ισχυρά (στην νόρμα) τότε συγκλίνει και ασθενώς. Το αντίθετο δεν ισχύει.

Παράδειγμα 0.3 *Η ακολουθία $f_n = (2\pi n)^{-1} exp(-x^2 (2n)^{-1})$ δεν συγκλίνει ισχυρά στο 0 στον L^1 αλλά συγκλίνει σε αυτό ασθενώς.*

Για να εξασφαλίσουμε την ασθενή σύγκλιση μιας ακολουθίας αρκεί να έχουμε ότι η ακολουθία είναι φραγμένη.

Θεώρημα 0.5 *Αν $x_n \in \mathbb{X}$ φραγμένη και $\mathbb{X}$ αυτοπαθής, δηλαδή $(\mathbb{X}')' = \mathbb{X}$, τότε υπάρχει $x \in \mathbb{X}$ τέτοιο ώστε $x_n \rightharpoonup x$ στον $\mathbb{X}$.*

Ορισμός 0.5 *Έστω x_n μια ακολουθία στον $\mathbb{X}$. Ας υποθέσουμε ότι ο $\mathbb{X}$ μπορεί να γραφεί σαν τον δυικό ενός χώρου $\mathbb{F}$, δηλαδή $\mathbb{X} = \mathbb{F}'$. Θα λεμε ότι η x_n συγκλίνει στο x $\star-$ασθενώς στον $\mathbb{X}$ (θα συμβολίζουμε $x_n \overset{\star}{\rightharpoonup} x$ στον $\mathbb{X}$) αν και μόνον αν για κάθε $y \in F$ ισχύει $x_n(y) \to x(y)$ (στον $\mathbb{R}$).*

Ισως εδώ χρειάζονται ορισμένα σχόλια: Εφόσον υπάρχει κάποιος χώρος $\mathbb{F}$, τέτοιος ώστε $\mathbb{X} = \mathbb{F}'$ θα μπορώ να καταλάβω οποιοδήποτε στοιχείο του $\mathbb{X}$ σαν ένα γραμμικό και φραγμένο συναρτησιακό του $\mathbb{Y}$, δηλαδή το $x \in \mathbb{X}$ είναι μια απεικόνιση απο το $\mathbb{Y}$ στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια για κάθε $y \in \mathbb{Y}$ $x(y) \in \mathbb{R}$. Η ακολουθία $x_n \in \mathbb{X}$ θα είναι λοιπόν μια ακολουθία απο γραμμικές και φραγμένες απεικονίσεις απο το $\mathbb{Y}$ στο $\mathbb{R}$ και κατά συνέπεια για κάθε $y \in \mathbb{Y}$ $x_n(y) \in \mathbb{R}$ θα είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών. Αν η ακολουθία αυτή συγκλίνει στο $y(x)$ (για κάθε y τότε θα λέμε ότι $x_n \overset{\star}{\rightharpoonup} x$ στον $\mathbb{X}$.

Σχόλιο 0.1 *Δεν είναι απαραίτητο όλοι οι χώροι $\mathbb{X}$ να μπορούν να χαρακτηριστούν σαν δυικοί κάποιου χώρου $\mathbb{F}$. Για παράδειγμα αν ο $\mathbb{X} = L^1$ τότε δεν υπάρχει κάποιος χώρος Banach $\mathbb{F}$ τέτοιος ώστε $L^1 = \mathbb{F}'$. Για τέτοιους χώρους η $\star-$ασθενής σύγκλιση δεν έχει νόημα!*

Εν γένει η $\star-$ασθενής σύγκλιση είναι πιο ασθενής απο την ασθενή σύγκλιση, μπορεί να βρεί κανείς ακολουθίες οι οποίες συγκλίνουν $\star-$ασθενώς αλλά όχι ασθενώς. Αν ο χώρος $\mathbb{X}$ είναι αυτοπαθής τότε η ασθενής σύγκλιση και η $\star-$ασθενής σύγκλιση συμπίπτουν. Συνεπώς για οποιοδήποτε χώρο L^p, $1 < p < \infty$ δεν έχει νόημα να διαχωριζουμε την $\star-$ασθενή σύγκλιση απο την ασθενή σύγκλιση αλλά πρέπει να προσέχουμε όταν $p = 1$ ή $p = \infty$.

Παράδειγμα 0.4 *Αν f_n είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στον L^p, με $1 < p < \infty$ τότε $f_n \rightharpoonup f$ στον L^p σημαίνει ότι $\int f_n \phi d\mu \to \int f \phi d\mu$ για κάθε $\phi \in L^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

Πρόταση 0.1 *Έστω $1 < p < \infty$. $f_n \rightharpoonup f$ στον $L^p \iff$ (i) $||f_n||_{L^p} < C$ για κάθε n (με C ανεξάρτητο του n) και (ii) $\int_I f_n d\mu \to \int_I f d\mu$ για κάθε διάστημα I.*

Παράδειγμα 0.5 *Αν f_n είναι μια ακολουθία συναρτήσεων στον L^1, τότε $f_n \rightharpoonup f$ στον L^1 σημαίνει ότι $\int f_n \phi d\mu \to \int f \phi d\mu$ για κάθε $\phi \in L^\infty$.*

Παράδειγμα 0.6 *Ο χώρος L^1 δεν είναι αυτοπαθής. Κατά συνέπεια μπορεί κανείς να βρεί φραγμένες ακολουθίες οι οποίες δεν συγκλίνουν ασθενώς. Παράδειγμα μπορεί να είναι η ακολουθία $f_n(x) = n\, \mathbf{1}_{[0,\frac{1}{n}]}(x)$ η οποία παρότι είναι φραγμένη δεν συγκλίνει ασθενώς πουθενά στον L^1.*

Παράδειγμα 0.7 *Πολλές φορές η $\star-$ασθενής σύγκλιση ειναι ευκολότερο να μελετηεί απο την ασθενή σύγκλιση. Για παράδειγμα αν μας ενδιαφέρει η σύγκλιση στον χώρο L^∞ είναι πολύ δύσκολο να μελετήσουμε την ασθενή σύγκλιση επειδή ο χώρος $(L^\infty)'$ είναι πολύ δύσκολο να χαρακτηριστεί. Απο την άλλη όμως $(L^1)' = L^\infty$ κατά συνέπεια είναι αρκετά βολικό να μελετήσουμε την $\star-$ασθενή σύγκλιση στον L^∞. Θα λέμε ότι $f_n \overset{\star}{\rightharpoonup} f$ στο L^∞ αν $\int f_n \phi d\mu \to \int f \phi d\mu$ για κάθε $\phi \in L^1$.*

$\star-$Ασθενής σύγκλιση και ασθενής σύγκλιση σε μέτρο

Η ασθενής σύγκλιση στο μέτρο σχετίζεται με την $\star-$άσθενή σύγκλιση.

Αν $F = C(S)$ τότε $(F)'$ είναι ο χώρος των μέτρων Borel στον S. Στην περίπτωση αύτή η $\star-$άσθενής σύγκλιση είναι η ασθενής σύγκλιση σε μέτρο. Την ακολουθία x_n μπορούμε να την καταλάβουμε σαν μια ακολουθία μέτρων μ_n και η $\star-$άσθενής σύγκλιση μπορεί να γραφεί ως $\int f\, d\mu_n \to \int f\, d\mu$ για κάθε $f \in C(S)$.

Παράδειγμα 0.8 *Αν $S = [0, 1]$ τότε αν r_n είναι μια πραγματική ακολουθία στο $[0, 1]$ τέτοια ώστε $r_n \to r$ η ακολουθία των μέτρων δ_{r_n} συγκλίνει στο μέτρο δ_r $\star-$ασθενώς.*

Περί συμπάγειας

Ένας χώρος λέγεται συμπαγής αν κάθε φραγμένη ακολουθία σε αυτόν έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Θεώρημα 0.6 (Αλαογλυ) *Σε ένα χώρο Banach η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B = \{F \in \mathbb{X}' : ||F||_{\mathbb{X}'} \leq 1\}$ είναι $\star-$ ασθενώς συμπαγής.*

Το θεώρημα αυτό μας λέει ότι κάθε φραγμένη ακολουθία στον $\mathbb{X}'$ έχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει $\star-$ ασθενώς.

Μια ενδιαφέρουσα εφαρμογή του θεωρήματος αυτού είναι ότι για κάθε ακολουθία μέτρων πιθανοτητας, υπάρχει μια υπακολουθία η οποία συγκλίνει ασθενώς σε μέτρο σε κάποιο μέτρο μ αρκεί τα μέτρα να είναι ορισμένα σε συμπαγή σύνολα. Αν το μέτρο δεν είναι ορισμένο σε συμπαγές σύνολο, π.χ. είναι ορισμένο στο $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ τότε δεν είναι απαραίτητο το όριο να είναι μέτρο πιθανότητας - μπορεί π.χ. $\mu(\mathbb{R}) < 1$ ή μπορεί και να μην υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Για να εξασφαλιστεί η ύπαρξη συγκλίνουσας υπακολουθίας πρέπει να ζητήσουμε την ιδιότητα του tightness.

Ορισμός 0.6 *Μια οικογένεια μέτρων ονομάζεται tight στο S αν υπάρχει συμπαγές σύνολο K τέτοιο ώστε για κάθε $\epsilon > 0$, $\mu(K) > 1 - \epsilon$ για κάθε μ στην οικογένεια αυτή.*

Θεώρημα 0.7 **(Prohorov)** *Αν μια οικογένεια μέτρων πιθανότητας είναι tight τότε είναι σχετικά συμπαγης, δηλαδή υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει ασθενώς.*